Pauta Auxiliar 13 (Pregunta 1)

Preparación de Control 2

13 de julio de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Se pide resolver la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en el rectángulo $D = [0, l] \times [0, h] \subseteq \mathbb{R}^2$ con las siguientes condiciones de borde.

$$u(0, y) = y^2 \qquad u(l, y) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \qquad u(x, h) = 0$$

Considerando la resolución de variables separables, es decir, $u(x, y) = X(x)Y(y)$, se puede ver que:

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

Lo anterior permite determinar el par de EDOs:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

Las cuales presentan distintas soluciones dependiendo del valor de λ, así en cada caso se tiene:

$\boxed{\lambda > 0}$ $X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ e $Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} + De^{-\sqrt{\lambda}y}$.

$\boxed{\lambda = 0}$ $X(x) = Ex + F$ e $Y(y) = Gy + H$.

$\boxed{\lambda < 0}$ $X(x) = Ie^{\sqrt{-\lambda}x} + Je^{-\sqrt{-\lambda}x}$ e $Y(y) = K\cos\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + L\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$.

En donde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L \in \mathbb{R}$ son constantes a determinar según las condiciones de borde, analizando las condiciones de borde nulas (transversales al valor de λ), se tiene que:

$$u(l, y) = 0 \Rightarrow X(l)Y(y) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x)Y'(0) = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0$$
$$u(x, h) = 0 \Rightarrow X(x)Y(h) = 0 \Rightarrow Y(h) = 0$$

Considerando el detalle de cada caso respecto a λ es posible hacer los siguientes desarrollos:

(i) $\boxed{\lambda > 0}$ Dado $Y(y)$ ya expresado, se tiene que:

$$Y'(y) = C\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}y} - D\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}y}$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y, se tiene que:

$$Y'(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C\sqrt{\lambda} - D\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C = D$$
$$\Rightarrow Y(y) = C(e^{\sqrt{\lambda}y} + e^{-\sqrt{\lambda}y}) = 2C\cosh\left(\sqrt{\lambda}y\right) = \bar{C}\cosh\left(\sqrt{\lambda}y\right)$$

$$Y(h) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \bar{C}\cosh\left(\sqrt{\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \bar{C} = 0 \Rightarrow Y(y) \equiv 0 \Rightarrow u(x,y) \equiv 0$$

Lo cual entra en contradicción con la condición de borde no nula que dice $u(0,y) = y^2 \not\equiv 0$, por lo que se concluye que no existe solución para $\lambda > 0$.

(ii) $\boxed{\lambda = 0}$ Dado $y(y)$ ya expresado, se tiene que:

$$Y'(y) = G$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y se tiene que:

$$Y'(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow G = 0 \Rightarrow Y(y) = H$$

$$Y(h) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow Y(y) \equiv 0$$

Lo cual razonando de forma análoga al caso de $\lambda > 0$, permite concluir que no existe solución para $\lambda = 0$.

(iii) $\boxed{\lambda < 0}$ Dado $Y(y)$ ya expresado, se tiene que:

$$Y'(y) = -K\sqrt{-\lambda}\operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + L\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y se tiene que:

$$Y'(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow L\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow Y(y) = K\cos\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

$$Y(h) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow K\cos\left(\sqrt{-\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\sqrt{-\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}h = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right), \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \lambda_n = -\frac{\pi^2}{h^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow Y(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) + \sum_{n=-\infty}^{0} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} K_{(-n+1)} \cos\left(\frac{\pi(-n+1-1/2)y}{h}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(K_n + K_{(-n+1)}\right)\cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)$$

NOTA: Este extenso desarrollo corresponde a la expresión en desarrollo formal de $Y(y)$, en el caso de una evaluación en tiempo *acotado* (i.e.: control) es posible argumentar de manera más relajada que la suma va de 1 a infinito directamente.

Por otro lado, para la condición de borde nula sobre X, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
X(l) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow Ie^{\sqrt{-\lambda}l} + Je^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \Rightarrow J = -Ie^{2\sqrt{-\lambda}l} \Rightarrow J_n = -I_n e^{2\sqrt{-\lambda_n}l}& \\
\Rightarrow X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} I_n e^{\sqrt{-\lambda_n}x} - I_n e^{2\sqrt{-\lambda_n}l} e^{-\sqrt{-\lambda_n}x} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2I_n e^{\sqrt{-\lambda_n}l}\left(\frac{e^{\sqrt{-\lambda_n}(x-l)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(x-l)}}{2}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{I}_n \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda_n}(x-l)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -\bar{I}_n \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda_n}(l-x)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) + \sum_{n=-\infty}^{0} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right)\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_{(-n+1)} \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(-n+1-1/2)(l-x)}{h}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{I}_n - \hat{I}_{(-n+1)}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right)
\end{aligned}
$$

NOTA: Este extenso desarrollo corresponde a la expresión en desarrollo formal de $X(x)$, en el caso de una evaluación en tiempo *acotado* (i.e.: control) es posible asumir $X(x) = \operatorname{senh}(\pi(n-1/2)(l-x)/h)$ directamente.

Así, la forma de la solución $u(x,y)$ corresponde a:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = X(x)Y(y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right)
\end{aligned}
$$

Así, la condición de borde no nula permite desarrollar:

$$
u(0,y) \overset{!}{=} y^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)l}{h}\right)
$$

Acá multiplicando por $\cos((m-1/2)y/h)$ con $m \in \mathbb{Z}$, integrando respecto a x en el intervalo $[0,l]$, y cambiando la variable muda de m a n, se puede despejar $\hat{K}_n$.

NOTA: A continuación se deja el desarrollo de lo enunciado en el párrafo anterior, sin embargo, se pueden asumir las expresiones para los coeficientes tipo $\hat{K}_n$ conocidos y plantear directamente la integral.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)l}{h}\right) = y^2$$

$$\Rightarrow \int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)l}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi(m-1/2)y}{h}\right) \mathrm{d}y = \int_0^h y^2 \cos\left(\frac{\pi(m-1/2)y}{h}\right) \mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)l}{h}\right) \int_0^h \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi(m-1/2)y}{h}\right) \mathrm{d}y = \int_0^h y^2 \cos\left(\frac{\pi(m-1/2)}{h}\right) \mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \frac{h\hat{K}_m}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(m-1/2)l}{h}\right) = \int_0^h y^2 \cos\left(\frac{\pi(m-1/2)y}{h}\right) \mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \hat{K}_n = \frac{2}{h \operatorname{senh}(\pi(n-1/2)l/h)} \int_0^h y^2 \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \mathrm{d}y$$

Con lo que se procede calculando la última integral de la expresión utilizando integración por partes:

$$\int_0^h y^2 \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{hy^2 \operatorname{sen}(\pi(n-1/2)y/h)}{\pi(n-1/2)}\right]_{y=0}^{y=h} - \int_0^h \frac{2hy \operatorname{sen}(\pi(n-1/2)y/h)}{\pi(n-1/2)} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{h^3(-1)^{n+1}}{\pi(n-1/2)} - \frac{2h}{\pi(n-1/2)} \int_0^h y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{h^3(-1)^{n+1}}{\pi(n-1/2)} - \frac{2h}{\pi(n-1/2)} \left(\left[-\frac{hy\cos(\pi(n-1/2)y/h)}{\pi(n-1/2)}\right]_{y=0}^{y=h} - \int_0^h -\frac{h\cos(\pi(n-1/2)y/h)}{\pi(n-1/2)} \mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{h^3(-1)^{n+1}}{\pi(n-1/2)} - \frac{2h^2}{\pi^2(n-1/2)^2} \left[\frac{h \operatorname{sen}(\pi(n-1/2)y/h)}{\pi(n-1/2)}\right]_{y=0}^{y=h} = \frac{h^3(-1)^{n+1}}{\pi(n-1/2)} - \frac{2h^3(-1)^{n+1}}{\pi^3(n-1/2)^3}$$

$$= \frac{h^3(-1)^{n+1}}{\pi(n-1/2)} \left(1 - \frac{2}{\pi^2(n-1/2)^2}\right) = \frac{h^3(-1)^{n+1}(\pi^2(n-1/2)^2-2)}{\pi^3(n-1/2)^3}$$

Así el término $\hat{K}_n$ corresponde a:

$$\hat{K}_n = \frac{2h^3(-1)^{n+1}(\pi^2(n-1/2)^2-2)}{\pi^3(n-1/2)^3 \operatorname{senh}(\pi(n-1/2)l/h)}$$

Por lo que finalmente el resultado de la EDP es:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h^3(-1)^{n+1}(\pi^2(n-1/2)^2-2)}{\pi^3(n-1/2)^3} \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \frac{\operatorname{senh}(\pi(n-1/2)(l-x)/h)}{\operatorname{senh}(\pi(n-1/2)l/h)}$$