Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002-1,3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Pauta Auxiliar 12 (Pregunta 1)

Ecuaciones en derivadas parciales v3.0

06 de julio de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Se pide resolver la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en el rectángulo $D = [0, l] \times [0, h] \subseteq \mathbb{R}^2$ con determinadas condiciones de borde.

Considerando $u(x, y) = X(x)Y(y)$, se puede ver que:

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

Lo anterior permite determinar el par de EDOs:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

Las cuales presentan distintas soluciones dependiendo del valor de λ, así en cada caso se tiene:

$\boxed{\lambda > 0}$ $X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ e $Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} + De^{-\sqrt{\lambda}y}$.

$\boxed{\lambda = 0}$ $X(x) = Ex + F$ e $Y(y) = Gy + H$.

$\boxed{\lambda < 0}$ $X(x) = Ie^{\sqrt{-\lambda}x} + Je^{-\sqrt{-\lambda}x}$ e $Y(y) = K\cos\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + L\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$.

En donde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L \in \mathbb{R}$ son constantes a determinar. Así, para cada condición de borde:

(a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x}(l, y) = 0$; $u(x, 0) = 0$ y $u(x, h) = x$.

Analizando las condiciones nulas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \Rightarrow X'(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, y) = 0 \Rightarrow X'(l)Y(y) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$$
$$u(x, 0) = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

Analizando caso a caso respecto a λ:

(i) $\boxed{\lambda > 0}$ Dado $X(x)$ ya expresado, se tiene que:

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre X, se tiene que:

$$X'(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow B\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

$$X'(l) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -A\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}l = n\pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)$$

Por otro lado, la condición de borde nula sobre Y implica:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow C + D = 0 \Rightarrow D = -C \Rightarrow Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} - Ce^{-\sqrt{\lambda}y} = 2C\left(\frac{e^{\sqrt{\lambda}y} - e^{-\sqrt{\lambda}y}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{C}_n \,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$$

Así, la forma de la solución $u(x,y)$ corresponde a:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \bar{C}_n \,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$$

Así, al condición de borde no nula permite desarrollar:

$$u(x,h) = x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{senh}\left(\frac{n\pi h}{l}\right) = x$$

Acá, multiplicando por $\cos(m\pi x/l)$ con m natural, integrando respecto a x en el intervalo 0 a l, cambiando la variable muda de m a n y despejando $\bar{A}_n$, se tiene que:

$$\bar{A}_n = \frac{2}{l\,\mathrm{senh}(n\pi h/l)} \int_0^l x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,\mathrm{d}x$$

Calculando la integral de este término, se tiene:

$$\int_0^l x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{lx\,\mathrm{sen}(n\pi x/l)}{n\pi}\right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{l\,\mathrm{sen}\,(n\pi x/l)}{n\pi}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{l^2\cos(n\pi x/l)}{n^2\pi^2}\right]_{x=0}^{x=l}$$
$$= \frac{l^2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$$

Así el término $\bar{A}_n$ corresponde a:

$$\bar{A}_n = \frac{2l((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2\,\mathrm{senh}(n\pi h/l)}$$

Por lo que el resultado de la EDP finalmente, es:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big) \frac{\mathrm{senh}(n\pi y/l)}{\mathrm{senh}(n\pi h/l)}$$

(ii) $\boxed{\lambda = 0}$ Dado $X(x)$ ya expresado, se tiene que:

$$X'(x) = E$$

Por lo que imponiendo cualquiera de las condiciones de borde nulas sobre X, se tiene que:

$$(X'(0) \stackrel{!}{=} 0 \;\vee\; X'(l) \stackrel{!}{=} 0) \Rightarrow E = 0 \Rightarrow X(x) = F$$

Por otro lado, la condición de borde nula sobre Y implica:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow Y(y) = Gy$$

Así, la forma de la solución $u(x,y)$ corresponde a:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = FGy = \bar{F}y$$

Pero como es posible notar, se tiene que al aplicar la condición de borde no nula:

$$u(x,h) = x \Rightarrow \bar{E}h = x$$

Pero dado que $\nexists \bar{E} \,:\, \bar{E}h = x$, entonces se dice que no existe solución para $\lambda = 0$.

(iii) $\boxed{\lambda < 0}$ Dado $X(x)$ ya expresado, se tiene que:

$$X'(x) = I\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - J\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre X, se tiene que:

$$\begin{aligned} X'(0) \stackrel{!}{=} 0 &\Rightarrow I\sqrt{-\lambda} - J\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow I = J \\ &\Rightarrow X(x) = I(e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}) = 2I\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) = \bar{I}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \end{aligned}$$

$$X'(l) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \bar{I}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \bar{I} = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0 \Rightarrow u(x,y) \equiv 0$$

Lo cual entra en contradicción con la condición de borde no nula que dice $u(x,h) = x \not\equiv 0$, por lo que se concluye que no existe solución para $\lambda < 0$.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0$; $u(l,y) = y(1-y)$; $u(x,0) = 0$; $u(x,h) = 0$.

Analizando las condiciones nulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 &\Rightarrow X'(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \\ u(x,0) = 0 &\Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \\ u(x,h) = 0 &\Rightarrow X(x)Y(h) = 0 \Rightarrow Y(h) = 0 \end{aligned}$$

Analizando caso a caso respecto a λ:

(i) $\boxed{\lambda > 0}$ Imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y, se tiene que:

$$Y(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C + D = 0 \Rightarrow D = -C$$
$$\Rightarrow Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} - Ce^{-\sqrt{\lambda}y} = C(e^{\sqrt{\lambda}y} - e^{-\sqrt{\lambda}y}) = 2C\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{\lambda}y\right) = \bar{C}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{\lambda}y\right)$$

$$Y(h) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \bar{C}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \bar{C} = 0 \Rightarrow Y(y) \equiv 0 \Rightarrow u(x,y) \equiv 0$$

Lo cual entra en contradicción con la condición de borde no nula que dice $u(l,y) = y(1-y) \not\equiv 0$, por lo que se concluye que no existe solución para $\lambda > 0$.

(ii) $\boxed{\lambda = 0}$ Imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y, se tiene que:

$$Y(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow Y(y) = Gy$$

$$Y(h) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow Gh = 0 \Rightarrow G = 0 \Rightarrow Y(y) \equiv 0 \Rightarrow u(x,y) \equiv 0$$

Lo cual entra en contradicción con la condición de borde no nula que dice $u(ly) = y(1-y) \not\equiv 0$, por lo que se concluye que no existe solución para $\lambda = 0$.

(iii) $\boxed{\lambda < 0}$ Imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y, se tiene que:

$$Y(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow K = 0 \rightarrow Y(y) = L\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

$$Y(h) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow L\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{-\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\left(\sqrt{-\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda_n}h = n\pi, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{h^2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$$

Por otro lado, para analizar la condición de borde nula sobre X, se deriva este:

$$X'(x) = I\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - J\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Evaluando en la condición de borde dicha, se tiene que:

$$X'(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow I\sqrt{-\lambda} - J\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow I = J$$
$$\Rightarrow X(x) = I\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right) = 2I\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{-\lambda}x\right) = \bar{I}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{-\lambda}x\right) = \bar{I}_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi x}{h}\right)$$

Así, la forma de la solución $u(x,y)$ corresponde a:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\bar{I}_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi x}{h}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{L}_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi x}{h}\right)$$

Así, la condición de borde no nula permite desarrollar:

$$u(l,y) \stackrel{!}{=} y(1-y) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \bar{L}_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi l}{h}\right)$$

Con un razonamiento idéntico al de la parte anterior, se puede plantar que:

$$\bar{L}_n = \frac{2}{h\,\text{senh}(n\pi l/h)} \int_0^h y(1-y)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\,dy$$

Lo que procede en el desarrollo del problema es calcular la integrar de la expresión anterior utilizando integración por partes y reemplazar.
Calculando la integral de este término, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^h y(1-y)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\,dy &= \left[-\frac{hy(1-y)\cos(n\pi y/h)}{n\pi}\right]_{y=0}^{y=h} - \int_0^h -\frac{h(1-2y)\cos(n\pi y/h)}{n\pi}\,dy \\
&= \left[\frac{h^2(1-2y)\,\text{sen}(n\pi y/h)}{n^2\pi^2}\right]_{y=0}^{y=h} - \int_0^h -\frac{2h^2\,\text{sen}(n\pi y/h)}{n^2\pi^2}\,dy \\
&= \left[\frac{-2h^3\cos(n\pi y/h)}{n^3\pi^3}\right]_{y=0}^{y=h} = \frac{2h^3(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}
\end{aligned}$$

Así, la forma de la solución $u(x,y)$ corresponde a:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4h^2(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\frac{\text{senh}(n\pi x/h)}{\text{senh}(n\pi l/h)}$$

(c) $u(0,y) = y^2$; $u(l,y) = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ y $u(x,h) = 0$.

Analizano las condiciones nulas:

$$\begin{aligned}
u(l,y) = 0 &\Rightarrow X(l)Y(y) = 0 \Rightarrow X(l) = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 &\Rightarrow X(x)Y'(0) = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0 \\
u(x,h) = 0 &\Rightarrow X(x)Y(h) = 0 \Rightarrow Y(h) = 0
\end{aligned}$$

Analizando caso a caso respecto a λ:

(i) $\boxed{\lambda > 0}$ Dado $Y(y)$ ya expresado, se tiene que:

$$Y'(y) = C\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}y} - D\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}y}$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y, se tiene que:

$$\begin{aligned}
Y'(0) \overset{!}{=} 0 &\Rightarrow C\sqrt{\lambda} - D\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C = D \\
&\Rightarrow Y(y) = C(e^{\sqrt{\lambda}y} + e^{-\sqrt{\lambda}y}) = 2C\cosh\left(\sqrt{\lambda}y\right) = \bar{C}\cosh\left(\sqrt{\lambda}y\right)
\end{aligned}$$

$$Y(h) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \bar{C}\cosh\left(\sqrt{\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \bar{C} = 0 \Rightarrow Y(y) \equiv 0 \Rightarrow u(x,y) \equiv 0$$

Lo cual entra en contradicción con la condición de borde no nula que dice $u(0,y) = y^2 \not\equiv 0$, por lo que se concluye que no existe solución para $\lambda > 0$.

(ii) $\boxed{\lambda = 0}$ Dado $y(y)$ ya expresado, se tiene que:

$$Y'(y) = G$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y se tiene que:

$$Y'(0) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow G = 0 \Rightarrow Y(y) = H$$

$$Y(h) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow Y(y) \equiv 0$$

Lo cual razonando de forma análoga al caso de $\lambda > 0$, permite concluir que no existe solución para $\lambda = 0$.

(iii) $\boxed{\lambda < 0}$ Dado $Y(y)$ ya expresado, se tiene que:

$$Y'(y) = -K\sqrt{-\lambda}\,\text{sen}\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + L\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

Por lo que imponiendo las condiciones de borde nulas sobre Y se tiene que:

$$Y'(0) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow L\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow Y(y) = K\cos\left(\sqrt{-\lambda}y\right)$$

$$\begin{aligned}
Y(h) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow K\cos\left(\sqrt{-\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\sqrt{-\lambda}h\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}h = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right), \forall n \in \mathbb{Z}\\
\Rightarrow \lambda_n = -\frac{\pi^2}{h^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\\
\Rightarrow Y(y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) + \sum_{n=-\infty}^{0} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} K_{(-n+1)} \cos\left(\frac{\pi(-n+1-1/2)y}{h}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (K_n + K_{-n+1}) \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)
\end{aligned}$$

NOTA: Este extenso desarrollo corresponde a la expresión en desarrollo formal de $Y(u)$, en el caso de una evaluación en tiempo *acotado* (i.e.: control) es posible argumentar de manera más relajada que la suma va de 1 a infinito directamente.

Por otro lado, para la condición de borde nula sobre X, se tiene que:

$$X(l) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow Ie^{\sqrt{-\lambda}l} + Je^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \Rightarrow J = -Ie^{2\sqrt{-\lambda}l} \Rightarrow J_n = -I_n e^{2\sqrt{-\lambda_n}l}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow X(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} I_n e^{\sqrt{-\lambda_n}x} - I_n e^{2\sqrt{-\lambda_n}l} e^{-\sqrt{-\lambda_n}x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2I_n e^{\sqrt{-\lambda_n}l} \left(\frac{e^{\sqrt{-\lambda_n}(x-l)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(x-l)}}{2} \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{I}_n \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda_n}(x-l)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -\bar{I}_n \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda_n}(l-x)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) + \sum_{n=-\infty}^{0} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) \right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_{(-n+1)} \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(-n+1-1/2)}{h}\right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{I}_n + \hat{I}_{(-n+1)}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

NOTA: Este extenso desarrollo corresponde a la expresión en desarrollo formal de $X(x)$, en el caso de una evaluación en tiempo *acotado* (i.e.: control) es posible asumir $X(x) = \operatorname{senh}(\pi(n-1/2)(l-x)/h)$ directamente.

Así, la forma de la solución $u(x,y)$ corresponde a:

$$\begin{aligned}
u(x,y) = X(x)Y(y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)(l-x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

Así, la condición de borde no nula permite desarrollar:

$$u(0,y) \overset{!}{=} y^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi(n-1/2)l}{h}\right)$$

Con un razonamiento idéntico al de las partes anteriores, se puede plantear que (la única diferencia es que se multiplica por $\cos(\pi(m-1/2)y/h)$):

$$\hat{K}_n = \frac{2}{h \operatorname{senh}(\pi(n-1/2)l/h)} \int_0^h y^2 \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)\, \mathrm{d}y$$

Con lo que se procede calculando la integral del término anterior utilizando integración por partes:

$$\int_0^h y^2 \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)y}{h}\right)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{hy^2\operatorname{sen}(\pi(n-1/2)y/h)}{\pi(n-1/2)}\right]_{y=0}^{y=h} - \int_0^h \frac{2hy\operatorname{sen}(\pi(n-1/2)y/h)}{\pi(n-1/2)}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{h^3(-1)^{n+1}}{\pi(n-1/2)} - \int_0^h (...)\,\mathrm{d}y$$

El resto del desarrollo es propuesto $\cup\omega\cup$.