Pauta Auxiliar 11 (Pregunta 1)

Ecuaciones en derivadas parciales v2.0

01 de junio de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Se pide resolver la siguiente EDP usando separación de variables.

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0, \forall (x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty)\\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0\\ u(x,0)=\operatorname{sen}(x)\end{gathered}$$

Siguiendo lo requerido, la separación de variables implica que existen X y T tales que $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ para todos los puntos $(x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty)$, de forma tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0\Leftrightarrow X(x)\cdot\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}\cdot T(t)\Rightarrow\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda\in\mathbb{R}$$

La última igualdad corresponde a una constante ya que al haber en la misma un término en función de exclusivamente una variable (x) y otro término en función de exclusivamente otra (t), la única forma posible en que esto suceda es que estas expresiones sean constantes, de esta forma se generan dos EDOs, una para $T(t)$ y otra para $X(x)$. La forma de estas funciones depende de λ, así se generan los siguientes casos:

- $\lambda=0$: En este caso $T'(t)=0\Rightarrow T(t)=T_0\in\mathbb{R}$, mientras que respecto a X, se tiene que $X''(x)=0\Rightarrow X(x)=Ax+B$, con $A,B\in\mathbb{R}$, por lo que finalmente $u(x,t)=T_0(Ax+B)\doteq ax+b$ (donde los términos corresponden a $a=T_0A$ y $b=T_0B$). Al aplicar la condición inicial se tiene que:

  $$u(x,0)=ax+b\stackrel{!}{=}\operatorname{sen}(x)$$

  Pero dado que $\nexists a,b\in\mathbb{R}\,:\,ax+b=\operatorname{sen}(x)$, se tiene que este caso $(\lambda=0)$ no tiene solución, así que $\lambda\neq0$.

En el caso general que $\lambda\neq0$, se tiene que para la ecuación del tiempo T, se cumple que:

$$T'(t)+\lambda T(t)=0\Rightarrow T(t)=T_0e^{-\lambda t}$$

Con $T_0\in\mathbb{R}$. Mientras que para la ecuación de la posición X, se tiene que:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\Rightarrow X(x)=\begin{cases}\bar{A}\cosh\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)+\bar{B}\operatorname{senh}\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) & \text{si } \lambda<0\\ A\cos\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)+B\operatorname{sen}\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) & \text{si } \lambda>0\end{cases}$$

Donde $A,\bar{A},B,\bar{B}\in\mathbb{R}$. Con lo anterior, se retornan a los dos casos restantes:

- $\lambda < 0$, se tiene que considerando $\bar{a} = \bar{A}T_0$ y $\bar{b} = \bar{B}T_0$:

$$u(x,t) = e^{|\lambda|t}\left(\bar{a}\cosh\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) + \bar{b}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = e^{|\lambda|t}\left(\bar{a}\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{|\lambda|}x\right) + \bar{b}\sqrt{|\lambda|}\cosh\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)\right)$$

Al evaluar esta expresión en las condiciones de borde, se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = e^{|\lambda|t}\left(\bar{a}\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{senh}\,(0) + \bar{b}\sqrt{|\lambda|}\cosh(0)\right) = e^{|\lambda|t}\bar{b}\sqrt{|\lambda|} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \bar{b} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = e^{|\lambda|t}\bar{a}\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{|\lambda|}\pi\right) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \bar{a} = 0$$

Por lo que esta condición lleva a que $u(x,t) = 0$, pero por otro lado la condición inicial implica que $u(x,0) = \mathrm{sen}(x) \not\equiv 0$, por lo que se concluye que no existe una solución a la ecuación para $\lambda < 0$.

Finalmente, se tiene el único caso válido es cuando $\lambda > 0$, en este considerando $a = AT_0$ y $b = BT_0$ se tiene:

$$u(x,t) = e^{-\lambda t}\left(a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = e^{-\lambda t}\left(b\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - a\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right)$$

Por lo que evaluando en las condiciones iniciales se llega a que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = e^{-\lambda t}\left(b\sqrt{\lambda}\cos(0) - a\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,(0)\right) = e^{-\lambda t}b\sqrt{\lambda} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow b = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = -e^{-\lambda t}a\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda = n^2, n \in \mathbb{N}$$

Por lo que de la condición anterior se tiene que λ depende de $n \in \mathbb{N}$ y cada solución particular toma la forma:

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t}a_n\cos(nx)$$

Por lo que la solución particular toma la forma:

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}a_n\cos(nx)$$

Donde los únicos valores desconocidos son los coeficientes $a_n, n \in \mathbb{N}$, para encontrarlos, se evalúa en la condición inicial y se nota que se requiere de la existencia de una constante, la cual no influye en la forma de la EDP, para ser solución, de esta forma se añade $a_0/2$ como constante:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}a_n\cos(nx) \Rightarrow u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) \overset{!}{=} \mathrm{sen}(x)$$

Por lo que ahora resta es encontrar la *serie de cosenos* que forma al seno. Para realizar esto, se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \mathrm{sen}(x) \Rightarrow \frac{a_0\cos(mx)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx)\cos(mx) = \mathrm{sen}(x)\cos(mx)$$

En donde $m \in \mathbb{R}$, se procede aprovechando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno:

$$\frac{a_0}{2}\int_0^\pi \cos(mx)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty a_n\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

En donde el término de la izquierda se desarrolla como:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}\int_0^\pi \cos(mx)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty a_n\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}\right]_{x=0}^{x=\pi} + \sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{a_0(0-0)}{2} + a_m\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a_m}{2}\end{aligned}$$

Por lo que se tiene que la expresión de los coeficientes corresponde a:

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \qquad\Leftrightarrow\qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

En la equivalencia anterior se utilizó simplemente una variable muda. Desarrollando para $n=0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\cos(0\cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\left[-\cos(x)\right]_{x=0}^{x=\pi}}{\pi} = \frac{2(\cos(0)-\cos(\pi))}{\pi} = \frac{2(1+1)}{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

Desarrollando para $n=1$:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \underset{(\star)}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi}\\ &= \frac{\cos(0)-\cos(2\pi)}{2\pi} = \frac{1-1}{2\pi} = \frac{0}{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Y desarrollando para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\operatorname{sen}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \underset{(\star)}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x+nx)+\operatorname{sen}(x-nx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}((n+1)x)-\operatorname{sen}((n-1)x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]_{x=0}^{x=\pi}\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi)-\cos(0)}{n-1}-\frac{\cos((n+1)\pi)-\cos(0)}{n+1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right)\\ &= \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi}\cdot\frac{n+1-n+1}{(n-1)(n+1)} = \frac{2((-1)^{n+1}-1)}{\pi(n^2-1)}\end{aligned}$$

Donde en $(\star)$ se utiliza que $2\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b), \forall a,b\in\mathbb{R}$. Así, se llega por un lado a que:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2((-1)^{n+1}-1)\cos(nx)}{\pi(n^2-1)} = \frac{2}{\pi} - \frac{4\cos(2x)}{3\pi} - \frac{4\cos(4x)}{15\pi} - \frac{4\cos(6x)}{35\pi} - \cdots, \forall x\in(0,\pi)$$

Mientras que **finalmente**... la solución de la EDP corresponde a:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2((-1)^{n+1}-1)e^{-n^2t}\cos(nx)}{\pi(n^2-1)} = \frac{2}{\pi} - \frac{4e^{-4t}\cos(2x)}{3\pi} - \frac{4e^{-16t}\cos(4x)}{15\pi} - \frac{4e^{-25t}\cos(6x)}{35\pi} - \cdots$$