Pauta Auxiliar 10 (Pregunta 2)

Ecuaciones en derivadas parciales (EDP)

01 de junio de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Se pide resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) &= 0, \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, \forall t \geq 0 \\ u(x,0) &= x(1-x), \forall x \in [0,1] \\ \alpha &= 2 \end{aligned}$$

La ecuación dada corresponde particularmente a una forma de la ecuación de calor, como se demostró en clases (ver video "zoom ecuacion de calor 3") una ecuación de calor con coeficiente α y largo de intervalo ℓ tiene por solución una función de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

En particular como $\alpha = 2$ y $\ell = 1$, se tiene que:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-2n^2\pi^2 t\right) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

En esta solución lo único que falta considerar es la condición de borde en $t = 0$, evaluando, la ecuación resulta en:

$$u(x,0) = x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-2n^2\pi^2 \cdot 0\right) \operatorname{sen}(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Siguiendo el desarrollo y como también fue demostrado (ver vídeo "zoom ecuación de calor 5"), al multiplicar por un término de la forma $\operatorname{sen}(m\pi x)$ e integrar en el intervalo $[0,1]$ se puede llegar a que:

$$a_m = 2\int_0^1 x(1-x) \operatorname{sen}(m\pi x)\, \mathrm{d}x$$

para encontrar la resolución completa del la EDP se requiere resultar la integral del término a_m, para proceder con esta, se utiliza la integración por partes, recordándola:

$$\int_a^b f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \cdot g(x)\, \mathrm{d}x$$

Para aplicar la integración por partes, se considerará $f(x) = x(1-x)$ y $g_x(x) = \operatorname{sen}(m\pi x)$

$$
\begin{aligned}
a_m &= 2\int_0^1 x(1-x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\left(\left[-\frac{x(1-x)\cos(m\pi x)}{m\pi}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{(1-2x)\cos(m\pi x)}{m\pi}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\left(-0+0+\frac{1}{m\pi}\int_0^1 (2x-1)\cos(m\pi x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{m\pi}\left(\left[\frac{(2x-1)\operatorname{sen}(m\pi x)}{m\pi}\right]_{x=0}^{x=1} + 2\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(m\pi x)}{m\pi}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{m\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(m\pi)}{m\pi} - 0 + \frac{2}{m\pi}\left[-\frac{\cos(m\pi x)}{m\pi}\right]_{x=0}^{x=1}\right) = \frac{2}{m\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(m\pi)}{m\pi} + \frac{2(1-\cos(m\pi))}{m^2\pi^2}\right) \\
&= \frac{2m\pi\operatorname{sen}(m\pi) + 4(1-\cos(m\pi))}{m^3\pi^3} = \frac{2m\pi\cdot 0 + 4(1-(-1)^m)}{m^3\pi^3} = \frac{4(1+(-1)^{m+1})}{m^3\pi^3}
\end{aligned}
$$

La última igualdad se realizó considerando que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y que $\cos(n\pi) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Esto permite obtener por un lado que:

$$
x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1+(-1)^{n+1})\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^3\pi^3} = \frac{8\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi^3} + \frac{8\operatorname{sen}(3\pi x)}{27\pi^3} + \frac{8\operatorname{sen}(5\pi x)}{125\pi^3} + \cdots
$$

Considerando todo lo anterior, la solución a la EDP corresponde a:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-2n^2\pi^2 t\right)\operatorname{sen}(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1+(-1)^{n+1})\exp\left(-2n^2\pi^2 t\right)\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^3\pi^3} \\
&= \frac{8\exp\left(-2\pi^2 t\right)\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi^3} + \frac{8\exp\left(-18\pi^2 t\right)\operatorname{sen}(3\pi x)}{27\pi^3} + \frac{8\exp\left(-50\pi^2 t\right)\operatorname{sen}(5\pi x)}{125\pi^3} + \cdots
\end{aligned}
$$