AUXILIAR 8

Pregunta 2

(a) Calcule

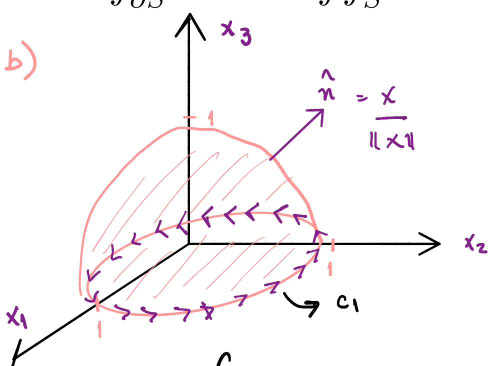
$$\int_S x_1 x_3 \, dS$$

donde $S = \{x_1^2 + x_2^2 = 1, \; 0 \leq x_3 \leq x_1 + 2\}$

(b) Verifique el teorema de Stokes con $v(x) = x_3 e_1 + x_1 e_2 + x_2 e_3$ y donde la superficie S es el hemisferio superior de radio 1.

$$\oint_{\partial \vec{S}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS \qquad n(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

b)



Encontramos la parametrización $r_1(\cdot)$ para $\underline{C_1}$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$r_1(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$

$V(r_1) = (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$r_1'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

$$\int_{\partial D} V(r(\theta)) \cdot r'(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1) \, d\theta$$

$$\boxed{= \pi}$$

- Ahora calculamos $\iint_D rot\, v \cdot \hat{n} \, dS$.

1) $rot\, v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_2 \\ \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 & \partial x_1 & \partial x_2 \\ x_3 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$ y $\hat{n} = \frac{x}{\|x\|}$

$\longrightarrow \hat{n} = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\|x_1, x_2, x_3\|}$

- Calculamos $\operatorname{rot} v \cdot \hat{n}$

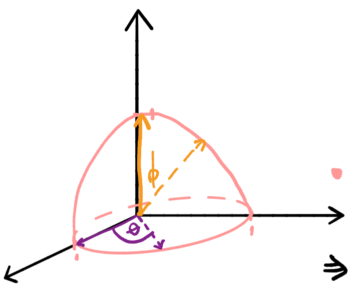
$$\Rightarrow \operatorname{rot} v \cdot \hat{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\|x\|}$$

Hacemos un cambio de variable a coordenadas esféricas.

$\rightarrow$ Como $r = 1$ tenemos:

$$X(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

Veamos donde se mueven las variables



$\rightarrow$ Notamos que $\theta \in [0, 2\pi]$
y $\phi \in [0, \pi/2]$

- Reemplazamos en $\operatorname{rot} v \cdot \hat{n}$.

$$\Rightarrow \operatorname{rot} v \cdot \hat{n} = \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\phi \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\phi$$

y $dS = \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} [\operatorname{sen}\phi^2 \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\phi^2 \cdot \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\phi \cos\phi] \, d\phi \, d\theta.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi^2 \cdot \cos\theta \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi^2 \cdot \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta}_{0} \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta}_{0} \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$\Rightarrow = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\phi \, d\phi \, d\theta$$

$\rightarrow$ Calculamos $\int \cos\phi \cdot \operatorname{sen}\phi \, d\phi$ para ello usamos el c.v $p = \operatorname{sen}\phi$

Si, $p = \operatorname{sen}\phi \Rightarrow dp = \cos\phi \, d\phi \Rightarrow d\phi = \dfrac{dp}{\cos\phi}$

Reemplazamos en la primitiva.

$$\int \cancel{\cos\phi} \cdot p \cdot \frac{dp}{\cancel{\cos\phi}} = \int p \, dp = \frac{p^2}{2} + C.$$

Volvemos a la incognita original $\Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}^2\phi}{2} + C$

y reemplazamos en la integral original.

$$\Rightarrow \iint_D \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2} \right|_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 1 \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}$$

$\therefore$ Comprobamos el Teo de Stokes!!

a) Calcule $\displaystyle\int_S x_1 x_3 \, dS.$

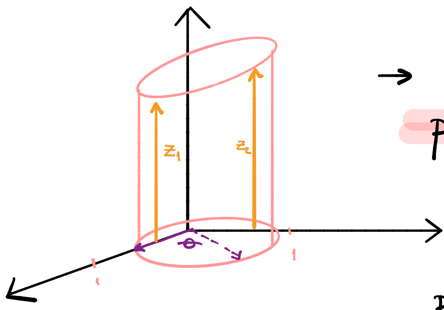
con $S = \{ x_1^2 + x_2^2 = 1 \ , \ 0 \le x_3 \le x_1 + 2 \}$

Veamos como es S. En primer lugar $x_1^2 + x_2^2 = 1$ es un cilindro de radio 1, con $0 \le x_3 \le x_1 + 2$ notamos que este cilindro está solo en el hemisferio superior y es cortado por el plano $x_1 + 2$.

$\rightarrow$ pero, ¿las Tapas pertenecen a S?

Notamos que ambas NO, ya que es $x_1^2 + x_2^2 = 1$

- La pregunta ahora es : ¿Que parametrización uso y cuales son mis variables ?



→ Claramente debemos usar polares , θ varía , pero r no ya que es cte.

- Notamos que $z_1 \neq z_2$ por ende vemos que x_3 varía.

⇒ Nuestra parametrización

$$X(\theta, x_3) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, x_3)$$

$$\Rightarrow \bullet\ X_\theta = \frac{X(\theta, x_3)}{\partial\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\bullet\ X_{x_3} = \frac{X(\theta, x_3)}{\partial x_3} = (0, 0, 1)$$

Calculamos ds :

$$ds = \| X_\theta \times X_{x_3} \|$$

$$\bullet\ X_\theta \times X_{x_3} = \left| \begin{array}{ccc|cc} e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_2 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

Calculamos la norma $= \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$

$$\Rightarrow ds = 1 \cdot d\theta\, dx_3$$

- Veamos donde se mueven nuestras variables.

1) $\theta \in [0, 2\pi]$ y $0 \leq x_3 \leq x_1 + 2 \Rightarrow x_3 \in [0, x_1 + 2]$

como $x_1 = \cos\theta \Rightarrow x_3 \in [0, \cos\theta + 2]$

Tenemos lo necesario para reemplazar en:

$$\int_S x_1 x_3 \, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta + 2} \cos\theta \cdot x_3 \, dx_3 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \frac{x_3^2}{2}\Big|_0^{\cos\theta+2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos\theta\,(\cos\theta + 2)^2 \, d\theta .$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \cos^3\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} \underbrace{2\cos\theta \, d\theta}_{0} .$$

NOTA!

- $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\left(3\cos(\theta) + \cos(3\theta)\right)$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta + 1)\right)$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\left(3\cos(\theta) + \cos(3\theta)\right) d\theta + \int_0^{2\pi} 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta + 1)\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\int_0^{2\pi} \underbrace{3\cos(\theta)\, d\theta}_{0} + \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(3\theta)\, d\theta}_{0}\right] + \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(2\theta)\, d\theta}_{0} + \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_S x_1 \cdot x_3 \, ds = \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{2\pi}$$