

Pauta Auxiliar 8 (Pregunta 1)

Preparación de Control 1

01 de junio de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk

Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

P1 (a) Se entrega la curva $\vec{C} = \{f(t) = \sin(t)e_1 + \sqrt{2}\cos(t)e_2 + \sin(t)e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

P1 (a) - (1) Se pide calcular la integral de trabajo:

$$\int_{\vec{C}} v(r) \cdot dr$$

En donde:

$$v(r) = \frac{-x_2}{2x_1^2 + x_2^2}e_1 + \frac{x_1}{2x_1^2 + x_2^2}e_2 + \frac{2x_3}{2x_1^2 + x_2^2}e_3$$

Agrupando términos de $v(r)$, se tiene que:

$$v(r) = \frac{-x_2e_1 + x_1e_2 + 2x_3e_3}{2x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en la definición de integral de trabajo, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{C}} v(r) \cdot dr &= \int_0^{2\pi} v(f(t)) \cdot f'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sin^2(t) + 2\cos^2(t)} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\cos(t) \\ \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sqrt{2}\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sqrt{2}\cos^2(t) - \sqrt{2}\sin^2(t) + 2\sin(t)\cos(t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\sin(t)\cos(t) - \sqrt{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} 2\sin(t)\cos(t) dt - \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(2 \int_0^0 u du - 2\sqrt{2}\pi \right) = \frac{2 \cdot 0 - 2\sqrt{2}\pi}{2} = -\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Donde en el paso (*) se realizó el cambio de variable $u = \sin(t)$, lo que implica que $du = \cos(t) dt$, además de $u_{t=0} = \sin(0) = 0$ y $u_{t=2\pi} = \sin(2\pi) = 0$.

P1 (a) - (2) Se pregunta si el campo es conservativo o no.

Respondiendo a la pregunta, **no** lo es, esto ya que:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0)e_1 + \sqrt{2}\cos(0)e_2 + \sin(0)e_3 = \sqrt{2}e_3 \\ f(2\pi) &= \sin(2\pi)e_1 + \sqrt{2}\cos(2\pi)e_2 + \sin(2\pi)e_3 = \sqrt{2}e_3 \end{aligned}$$

Lo que implica que $f(0) = f(2\pi)$ que corresponden a los extremos de $\vec{C}$, esto quiere decir que $\vec{C}$ es cerrado, por lo que como vemos que existe $\mathcal{C} = \vec{C}$ tal que:

$$\oint_{\mathcal{C}} v(r) \cdot dr \neq 0$$

Se tiene que $v(r)$ no es conservativo.

P1 (b) Se pide verificar el teorema de green para $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ y:

$$u(x, y) = xye_1 + \frac{1}{2}x^2e_2$$

Comenzando por analizar el dominio dado, notar que este corresponde a:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge y \in [0, 1 - x^2]\}$$

Por otro lado se tiene que $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde:

$$\Gamma_1 = \{f_1(t) = (-t, 1 - t^2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [-1, 1]\}$$

$$\Gamma_2 = \{f_2(t) = (t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [-1, 1]\}$$

Respecto a las funciones P y Q , notar que se tiene que $u(x, y) = P(x, y)e_1 + Q(x, y)e_2$, en donde $P(x, y) = xy$ y $Q(x, y) = x^2/2$, de esta forma, las derivadas parciales corresponden a:

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{2} \right) = \frac{2x}{2} = x \quad ; \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$$

Por lo que se llega a que uno de los términos del Teorema de Green cumple:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dA = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} x - x \, dy \, dx = \iint_D 0 \, dA = 0$$

Por otro lado, dado que la frontera de D corresponde a la unión de dos curvas con parametrizaciones distintas se tiene que los diferenciales dx y dy van a adquirir distintas expresiones según t y dt dependiendo si se esté recorriendo la curva Γ_1 o Γ_2 , para cada caso:

- Curva Γ_1 : Se tiene que:

$$dx = \frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{d(-t)}{dt} dt = -dt \quad ; \quad dy = \frac{dy(t)}{dt} dt = \frac{d(1 - t^2)}{dt} dt = -2t \, dt$$

- Curva Γ_2 : Se tiene que:

$$dx = \frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{dt}{dt} dt = dt \quad ; \quad dy = \frac{dy(t)}{dt} dt = \frac{d0}{dt} dt = 0$$

Así el otro término del Teorema de Green corresponde a:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy &= \int_{\Gamma_1} P(f_1(t)) \cdot -dt + Q(f_1(t)) \cdot -2t \, dt + \int_{\Gamma_2} P(f_2(t)) \, dt + Q(f_2(t)) \cdot 0 \\ &= \int_{-1}^1 \left(-t(1 - t^2) \cdot -1 + \frac{t^2}{2} \cdot -2t \right) dt + \int_{-1}^1 t \cdot 0 \, dt + 0 = \int_{-1}^1 t - t^3 - t^3 + 0 \, dt \\ &= \int_{-1}^1 t - 2t^3 \, dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{2t^4}{4} \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

De esta forma se llega a la igualdad del Teorema de Green expresada abajo, por lo que se verifica el mismo.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial D} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$$