Pauta Auxiliar 6 (Pregunta 1)

Integral del flujo

25 de mayo de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Pregunta 1 Considerando el campo vectorial dado según coordenadas polares $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\hat{\rho}/\rho^2$ y la región del plano dada por el semiplano:

$$\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > a\}$$

Con $k \in \mathbb{R}$ y $a > 0$ fijos. Se pide calcular la integral de flujo:

$$\int_{\partial\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

En conjunto a la indicación que $\int (x^2+c^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = xc^{-2}(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} + C$, con $c \in \mathbb{R}$ fijo y C la constante de integración, además que $\operatorname{sen}(\arctan(x)) = x/\sqrt{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Para resolver el problema planteado, se determina que por simplicidad de operación respecto a los productos punto y derivadas del problema, se trabaja en coordenadas cartesianas, de esta forma se tiene que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{k\hat{\rho}}{\rho^2} = \frac{k(\cos(\theta)\hat{x} + \operatorname{sen}(\theta)\hat{y})}{\rho^2} \Rightarrow \mathbf{F}(x,y) = \frac{k\cos(\theta(x,y))}{(\rho(x,y))^2}\hat{x} + \frac{k\operatorname{sen}(\theta(x,y))}{(\rho(x,y))^2}\hat{y}$$

En donde:

$$\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Notar por otro lado, que la frontera de $\mathcal{S}$ corresponde a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\}$ donde su parametrización positiva está dada por:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ a \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix},\ t \in (-\infty, \infty)$$

Considerando esto, su vector normal corresponde a:

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con estos parámetros ya obtenidos, se puede calcular la integral de flujo:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{w}(\vec{r}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k\cos[\theta(\vec{r}(t))]}{[\rho(\vec{r}(t))]^2}\hat{x} + \frac{k\operatorname{sen}[\theta(\vec{r}(t))]}{[\rho(\vec{r}(t))]^2}\hat{y}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{k\operatorname{sen}[\theta(\vec{r}(t))]}{[\rho(\vec{r}(t))]^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Evaluando las expresiones de $\rho(\vec{r}(t))$ y $\theta(\vec{r}(t))$, se tiene que:

$$\rho(\vec{r}(t)) = \rho(t,a) = \sqrt{t^2+a^2}$$
$$\theta(\vec{r}(t)) = \theta(t,a) = \begin{cases} \arctan(a/t) & \text{si } t>0 \\ \pi/2 & \text{si } t=0 \\ \arctan(a/t)+\pi & \text{si } t<0 \end{cases}$$

Considerando las evaluaciones, se tiene que:

$$\int_{\partial\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = -k\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sen}(\arctan(a/t)+\pi)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\arctan(a/t))}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

Desarrollando la primera expresión trigonométrica, se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\arctan(x)+\pi) = \operatorname{sen}(\arctan(x))\cos(\pi) + \cos(\arctan(x))\operatorname{sen}(\pi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(-1)+0 = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{S}^+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s &= -k\left(\int_{-\infty}^{0} -\frac{(a/t)}{(t^2+a^2)\sqrt{(a/t)^2+1}}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{(a/t)}{(t^2+a^2)\sqrt{(a/t)^2+1}}\,\mathrm{d}t\right) \\
&\overset{(\star)}{=} -k\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{a}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{a}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t\right) = -k\left(\left[\frac{t}{a\sqrt{t^2+a^2}}\right]_{t\to-\infty}^{t=0} + \left[\frac{t}{a\sqrt{t^2+a^2}}\right]_{t=0}^{t\to\infty}\right) \\
&= -k\left(0-\left(-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}-0\right) = \frac{2k}{a}
\end{aligned}$$

Respecto al cambio de signo de la fracción de la integral de la derecha en la igualdad $(\star)$, se tiene que para $t<0$, su valor absoluto es $|t|=-t$, es por esto que:

$$\frac{a/t}{\sqrt{(a/t)^2+1}} = \frac{|t|\cdot a/t}{|t|\sqrt{(a/t)^2+1}} = \frac{-ta/t}{\sqrt{t^2\cdot(a/t)^2+t^2}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}$$