

# Pauta tarea 1 y 2 (pregunta 2)

**P2** Sea la función  $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g'(t) > 0, \forall t \geq 1$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = M$ . Considere la parametrización de la curva  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\vec{r}(t) = (\cos(g(t)), \sin(g(t)), 1)$$

(a) Encuentre el largo total de  $\Gamma$

(b) Encuentre los vectores  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$

a) encontremos  $M$

$$M(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

Calculamos  $\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin(g(t)) \cdot g'(t), \cos(g(t)) \cdot g'(t), 0)$

Ahora encontramos  $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\sin^2(g(t)) \cdot g'(t)^2 + \cos^2(g(t)) \cdot g'(t)^2}$   
 $= \sqrt{g'(t)^2} = g'(t)$

y ahora evaluamos  $\int_0^\infty g'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) - g(0)$

$$\Rightarrow = M - g(0)$$

**P2**

Calcule la siguiente integral:

$$\int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$$

a lo largo del camino  $\Gamma$  limitado por los arcos  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , dados por las ecuaciones:

$$\Gamma_1 = \begin{cases} x^2 + 9y^2 = 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \Gamma_2 = \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y \leq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

Para poder encontrar esta integral de línea debo seguir los siguientes pasos.

1. encontrar una parametrización para cada camino  $\Gamma$  que tenga.

• Sea  $\vec{r}_1(t)$  la param. de  $\Gamma_1$

$$\vec{r}_1(t) = (\cos t, 1/3 \operatorname{sen} t) \quad ; \quad \text{con } t \in [0, \pi/2]$$

$$\text{y } \vec{r}_1'(t) = (-\operatorname{sen} t, 1/3 \cos t)$$

• Sea  $\vec{r}_2(t)$  la param. de  $\Gamma_2$

$$\vec{r}_2(t) = (t, -2 + 2t) \quad ; \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

$$\text{y } \vec{r}_2'(t) = (1, 2)$$

2. Reemplazar lo obtenido en

$$\int_{\Gamma} F(r) dr = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} F(r_j(t)) \cdot \vec{r}_j'(t) dt.$$

$\Rightarrow$  Para  $\Gamma_1$ :

$$= \int_0^{\pi/2} F(\cos t, 1/3 \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, 1/3 \cos t)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow &= \int_0^{\pi/2} \left( \cos^2 t - \frac{1}{9} \sin^2 t, \frac{2}{3} \cos t \sin t \right) \cdot (-\sin t, \frac{1}{3} \cos t) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} -\cos^2 t \sin t + \frac{\sin^3 t}{9} + \frac{2}{9} \cos^2 t \sin t dt \\
 &= \frac{\cos^3(t)}{3} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3(t) - 3 \cos(t)}{27} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2 \cos^3(t)}{27} \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{\cos^3(\pi/2) - \cos^3(0)}{3} + \frac{\cos^3(\pi/2) - 3 \cos(\pi/2)}{27} - \frac{\cos^3(0) + 3 \cos(0)}{27} \\
 &\quad - \frac{2 \cos^3(\pi/2)}{27} + \frac{2 \cos^3(0)}{27} \\
 &= -\frac{1}{3} - \frac{1+3}{27} + \frac{2}{27} = -\frac{9+2+2}{27} = -\frac{5}{27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{Para } M_2 \\
 &\int_0^1 \left( t^2 - (-2+2t)^2, 2t(-2+2t) \right) \cdot (1, 2) dt \\
 &= \int_0^1 t^2 - 4t^2 + 8t - 4 - 8t + 8t^2 dt \\
 &= \int_0^1 5t^2 - 4 dt \\
 &= \frac{5}{3} t^3 \Big|_0^1 - 4t \Big|_0^1 = \frac{5}{3} - 4 = -\frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

3. Sumar todos los resultados obtenidos en

$$\Rightarrow \int_r F \cdot dr = -\frac{5}{27} - \frac{7}{3} = \frac{-5-63}{27} = -\frac{68}{27}$$

Éxito!!  
😊❤