Pauta Auxiliar 5.2 (Pregunta 1)

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Considerando $\mathcal{S}$ como la región que delimita el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ y las funciones $P(x,y) = xy$ y $Q(x,y) = x^2 + y^2$, se pide calcular la integral:

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}A$$

Comenzando obteniendo las funciones que delimitan la curva que corresponderán a los límites de integración, se tiene que:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \ \wedge \ y \in [x,1]\}$$

Calculando ahora las derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x$$

Finalmente, desarrollando la integral:

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_x^1 2x - x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_x^1 x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [xy]_{y=x}^{y=1} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x - x^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{6}$$