

Pauta Auxiliar 4 (Pregunta 1)

Repaso curvas
24 de abril de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk

Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Pregunta 1 Se presenta el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = y\hat{x} + x\hat{y}$ y la curva Γ mostrada en la figura, se pide encontrar la integral de trabajo:

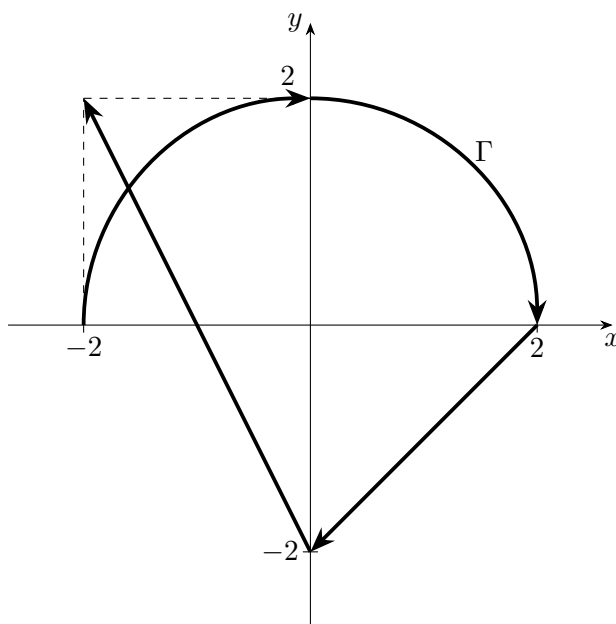


Figura 1: Curva Γ

Notar que la curva Γ es regular por pedazos y se puede descomponer en tres curvas:

$$\Gamma_1 = \{f_1(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [-\pi, 0]\}$$

$$\Gamma_2 = \{f_2(t) = (t, t-2) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2]\}$$

$$\Gamma_3 = \{f_3(t) = (t, -2t-2) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-2, 0]\}$$

Pero acá la parametrización SI importa, por lo que al considerar los intervalos dados en las expresiones anteriores se están recorriendo estos segmentos en sentido contrario, de esta forma se dirá que la curva corresponde a:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3^-$$



Desarrollando la integral de línea, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{-\pi}^0 \mathbf{F}(f_1(\theta)) \cdot f_1'(\theta) d\theta - \int_0^2 \mathbf{F}(f_2(t)) \cdot f_2'(t) dt - \int_{-2}^0 \mathbf{F}(f_3(t)) \cdot f_3'(t) dt \\
 &= \int_{-\pi}^0 (2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta)) \cdot (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta)) d\theta - \int_0^2 (t-2, t) \cdot (1, 1) dt - \int_{-2}^0 (-2t-2, t) \cdot (1, -2) dt \\
 &= \int_{-\pi}^0 4(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) d\theta - \int_0^2 2t-2 dt - \int_{-2}^0 -4t-2 dt \\
 &= 4 \int_{-\pi}^0 \cos(2\theta) d\theta - [t^2 - 2t]_{t=0}^{t=2} + [2t^2 + 2t]_{t=-2}^{t=0} \\
 &= 4 \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{\theta=-\pi}^{\theta=0} - (4 - 4 - 0 + 0) + 0 - 0 - 8 + 4 = 4(0 - 0) - 4 = -4
 \end{aligned}$$