Pauta Auxiliar 3 (Sección 1)

Repaso curvas

06 de abril de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Pregunta 1 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\operatorname{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $|a| > 0$.

P1 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, cerrada, simple o regular.

Referido a cada elemento pedido:

- Sobre si es suave, basta notar que $a\cos(t)$ y $a\operatorname{sen}(t)$ son funciones de clase $\mathcal{C}^1$, ya que estas forman las coordenadas de $\vec{r}(t)$, se tiene que $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$, por lo que la parametrización es suave.
- Sobre si es cerrada, notar que $\vec{r}(0) = (a\cos(0), a\operatorname{sen}(0)) = (a, 0)$ y $\vec{r}(2\pi) = (a\cos(2\pi), a\operatorname{sen}(2\pi)) = (a, 0)$, por lo que efectivamente $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$, lo que implica que la curva es cerrada.
- Sobre si es simple, notamos que no lo es ya que $\vec{r}$ no es inyectiva, esto ya que existen $t_1 = 0$ y $t_2 = 2\pi$ tales que $t_1 \neq t_2$ y $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$, esto es una consecuencia directa de que la curva sea cerrada.
- Sobre si es regular, notemos que efectivamente es suave, y solo basta verificar que $\forall t \in I, \vec{r}(t) \neq \mathbf{0}$, en efecto, $\vec{r}\,'(t) = (-a\operatorname{sen}(t), a\cos(t))$, donde:

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = \sqrt{(-a\operatorname{sen}(t))^2 + (a\cos(t))^2} = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2(t) + a^2\cos^2(t)} = \sqrt{a^2} = |a| > 0$$

  De esta forma $\forall t \in [0, 2\pi]$ se tiene que $\|\vec{r}\,'(t)\| > 0 \Leftrightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0 \Leftrightarrow \vec{r}(t) \neq (0, 0)$, por lo que la curva es regular.

P1 (b) Se pide encontrar una parametrización en longitud de arco para la curva.

Para comenzar a resolver esta pregunta, se debe calcular la función de longitud de arco, es decir:

$$s(t) = \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(u)}{\mathrm{d}u}\right\| \mathrm{d}u = \int_0^t |a| \, \mathrm{d}u = [|a|u]_{u=0}^{u=t} = |a|t$$

Teniendo $s(t)$ calculada, se puede expresar t en función de s de forma sencilla, $t(s) = s/|a|$, finalmente, reemplazando en la parametrización dada originalmente, se obtiene la parametrización en longitud de arco para la curva:

$$\sigma(s) = \vec{r}(t(s)) = \begin{pmatrix} a\cos(s/|a|) \\ a\operatorname{sen}(s/|a|) \end{pmatrix}$$

Donde $s \in [0, L(\Gamma)] = [0, s(2\pi)] = [0, 2\pi|a|]$.

Pregunta 2

P2 (a) Se nos da una curva C descrita en coordenadas polares por la relación $r = f(\phi)$, donde $\phi \in [a,b]$, $b \in [a, a+2\pi]$ y $f \in \mathcal{C}^1$, y se pide demostrar que la longitud de arco está dada por $\int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi$.

Para resolver esto, hay que considerar la parametrización que proponen las coordenadas polares, en este caso:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\,\mathrm{sen}(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\phi)\cos(\phi) \\ f(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}[f(\phi)\cos(\phi)]}{\mathrm{d}\phi} \\ \frac{\mathrm{d}[f(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)]}{\mathrm{d}\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(\phi)\cos(\phi) - f(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) \\ f'(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) + f(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Calculando la norma de la derivada de $\vec{r}$, se llega a:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right\| &= \sqrt{(f'(\phi)\cos(\phi) - f(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi))^2 + (f'(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi) + f(\phi)\cos(\phi))^2} \\ &= \sqrt{(f'(\phi))^2\cos^2(\phi) - (\,\%) + (f(\phi))^2\,\mathrm{sen}^2(\phi)) + (f'(\phi))^2\,\mathrm{sen}^2(\phi) + (\,\%) + (f(\phi))^2\cos^2(\phi)} \\ &= \sqrt{(f(\phi))^2(\cos^2(\phi) + \mathrm{sen}^2(\phi)) + (f'(\phi))^2(\cos^2(\phi) + \mathrm{sen}^2(\phi))} = \sqrt{(f(\phi))^2 + (f'(\phi))^2}\end{aligned}$$

Donde $(\,\%) = 2f(\phi)f'(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi)$. Así, ocupando la fórmula que da el largo de la curva, se tiene que:

$$L(C) = \int_a^b \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right\| \mathrm{d}\phi = \int_a^b \sqrt{(f(\phi))^2 + (f'(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi$$

Que corresponde a la expresión que se buscaba demostrar.

P2 (b) Se pide calcular el largo del cardioide dado por la expresión $r = k(1+\cos(\phi))$, con $\phi \in [0, 2\pi]$, utilizando la parte (a) se tiene que la longitud corresponde a:

$$\begin{aligned}L(K) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(k(1+\cos(\phi)))^2 + \left(\frac{\mathrm{d}[k(1+\cos(\phi)]}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{k^2(1+\cos(\phi))^2 + (-k\,\mathrm{sen}(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{k^2(1 + 2\cos(\phi) + \cos^2(\phi)) + k^2\,\mathrm{sen}^2(\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} |k|\sqrt{1 + 2\cos(\phi) + \cos^2(\phi) + \mathrm{sen}^2(\phi)}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}|k|\sqrt{1+\cos(\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{2}|k| \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1}\,\mathrm{d}\phi = 2|k| \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}\,\mathrm{d}\phi \\ &= 2|k| \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2(\theta)} \cdot 2\,\mathrm{d}\theta = 4|k| \int_0^{\pi} |\cos(\theta)|\,\mathrm{d}\theta = 4|k| \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right) \\ &= 4|k| \left([\mathrm{sen}(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + [-\,\mathrm{sen}(\theta)]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi}\right) = 4|k|(1 - 0 + (-0) - (-1)) = 8|k|\end{aligned}$$

Pregunta 3 Considerando la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = \left(\int_0^t e^{-u}\cos\left(u^2\right)\,\mathrm{d}u, \int_0^t e^{-u}\operatorname{sen}(u^2)\,\mathrm{d}u, 1-e^{-t}\right)$, cuya variable cumple $t \in [0,\infty)$, se pide:

P3 (a) Se pide calcular la longitud de Γ y encontrar su parametrización en longitud de arco.

Para comenzar a responder esta pregunta se calcula la función de longitud de arco, la que corresponde a:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(w)}{\mathrm{d}w}\right\| \mathrm{d}w = \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\begin{pmatrix} \int_0^w e^{-u}\cos\left(u^2\right)\mathrm{d}u \\ \int_0^w e^{-u}\operatorname{sen}\left(u^2\right)\mathrm{d}u \\ 1-e^{-w}\end{pmatrix}\right\| \mathrm{d}w = \int_0^t \left\|\begin{pmatrix} e^{-w}\cos\left(w^2\right) \\ e^{-w}\operatorname{sen}\left(w^2\right) \\ e^{-w}\end{pmatrix}\right\| \mathrm{d}w \\
&= \int_0^t \sqrt{(e^{-w}\cos(w^2))^2 + (e^{-w}\operatorname{sen}(w^2))^2 + (e^{-w})^2}\,\mathrm{d}w = \int_0^t \sqrt{e^{-2w}(\cos^2(w^2)+\operatorname{sen}^2(w^2)+1)}\,\mathrm{d}w \\
&= \int_0^t \left|e^{-w}\right|\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}w = \sqrt{2}\int_0^t e^{-w}\,\mathrm{d}w = \sqrt{2}\left[-e^{-w}\right]_{w=0}^{w=t} = \sqrt{2}(1-e^{-t})
\end{aligned}$$

De esta forma, la longitud de Γ corresponde al valor de $s(t)$ cuando $t\to\infty$, de esta forma:

$$L(\Gamma) = \lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty}\sqrt{2}(1-e^{-t}) = \sqrt{2}$$

Para encontrar la parametrización en longitud de arco, se necesita expresar t en función de s, esto corresponde a:

$$s = \sqrt{2}(1-e^{-t}) \Leftrightarrow \frac{s}{\sqrt{2}} = 1-e^{-t} \Leftrightarrow e^{-t} = 1-\frac{s}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s}\right)$$

Reemplazando en la parametrización original, se tiene la parametrización en longitud de arco:

$$\sigma(s) = \vec{r}(t(s)) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s}\right)} e^{-u}\cos\left(u^2\right)\mathrm{d}u \\ \displaystyle\int_0^{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s}\right)} e^{-u}\operatorname{sen}\left(u^2\right)\mathrm{d}u \\ \dfrac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, s \in [0,\sqrt{2})$$

P3 (b) Se pide determinar el vector tangente, normal y la curvatura.

Para responder los elementos pedidos, notar que de la parte (a) se puede extraer que:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos\left(t^2\right) \\ e^{-t}\operatorname{sen}\left(t^2\right) \\ e^{-t}\end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{2}e^{-t}$$

De donde vector tangente corresponde a:

$$\vec{T}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| = \begin{pmatrix} \cos\left(t^2\right)/\sqrt{2} \\ \operatorname{sen}\left(t^2\right)/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

La derivada de este vector y la norma de esta corresponden a:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2t\operatorname{sen}(t^2) \\ 2t\cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{\sqrt{(-2t\operatorname{sen}(t^2))^2 + (2t\cos(t^2))^2}}{\sqrt{2}} = \frac{2t\sqrt{\operatorname{sen}^2(t^2)+\cos^2(t^2)}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}t$$

De esta forma el vector normal corresponde a:

$$\vec{N}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t^2) \\ \cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La curvatura por otra parte, corresponde a:

$$\kappa(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\right\|\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{2}e^{-t}} = te^t$$

P3 (c) Se pide determinar el vector binormal y la torsión.

Para obtener el vector binormal hay que calcular:

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t)\times\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2)/\sqrt{2} \\ \operatorname{sen}(t^2)/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t^2) \\ \cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos(t^2)/\sqrt{2} & \operatorname{sen}(t^2)/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -\operatorname{sen}(t^2) & \cos(t^2) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(t^2)/\sqrt{2} \\ -\operatorname{sen}(t^2)/\sqrt{2} \\ \cos^2(t^2)/\sqrt{2} + \operatorname{sen}^2(t^2)/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t^2)/\sqrt{2} \\ -\operatorname{sen}(t^2)/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para calcular la torsión, se comienza calculando:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2t\operatorname{sen}(t^2) \\ 2t\cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que calculando finalmente:

$$\tau(t) = -\vec{N}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}s}\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| = -\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t^2) \\ \cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix}\cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2t\operatorname{sen}(t^2) \\ 2t\cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix}/(\sqrt{2}e^{-t})$$

$$= \frac{e^t(2t\operatorname{sen}^2(t^2) + 2t\cos^2(t^2))}{2} = te^t$$

Pregunta 4 Se da una partícula que describe una trayectoria Γ sobre el manto del cono dado por $x^2+y^2=z^2$ de tal forma que $z=e^{-\theta}$ con $\theta\in[0,\infty)$, con θ el ángulo en polares tal que $x(\theta)=r(\theta)\cos(\theta)$ y $y(\theta)=r(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$.

P4 (a) Se pide encontrar una parametrización e indicar si es suave, simple y regular.

Para encontrar una parametrización, recordar que las coordenadas polares cumplen que:

$$(x(\theta))^2+(y(\theta))^2=(r(\theta)\cos(\theta))^2+(r(\theta)\operatorname{sen}(\theta))^2=(r(\theta))^2(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))=(r(\theta))^2$$

En este caso, como la partícula se mueve en el cono, cumple que $r^2=x^2+y^2=z^2$, considerando que en coordenadas polares $r>0$ y que $z=e^{-\theta}>0$, se tiene que $r=z=e^{-\theta}$, por lo que una parametrización de la trayectoria corresponde a:

$$\vec{r}(\theta)=\begin{pmatrix} e^{-\theta}\cos(\theta)\\ e^{-\theta}\operatorname{sen}(\theta)\\ e^{-\theta}\end{pmatrix}$$

Notar que tanto $e^{-\theta}\cos(\theta)$, $e^{-\theta}\operatorname{sen}(\theta)$ y $e^{-\theta}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^1$, dado que estas forman las coordenadas de $\vec{r}(\theta)$, se tiene que $\vec{r}\in\mathcal{C}^1$, por lo que la parametrización es suave, además de esto, notar que para dos ángulos θ_1 y θ_2 tales que:

$$\vec{r}(\theta_1)=\vec{r}(\theta_2)\overset{(\star)}{\Rightarrow} e^{-\theta_1}=e^{-\theta_2}\Rightarrow -\theta_1=-\theta_2\Rightarrow\theta_1=\theta_2$$

Lo que implica que $\vec{r}(\theta)$ es inyectiva, la implicancia $(\star)$ es cierta dado que una igualdad vectorial corresponde a una igualdad por coordenadas, en particular la tercera coordenada, con esto, la curva es simple, por otro lado:

$$\vec{r}\,'(\theta)=\begin{pmatrix} -e^{-\theta}(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta))\\ e^{-\theta}(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))\\ -e^{-\theta}\end{pmatrix}$$

De donde se tiene que:

$$\begin{aligned}\forall\theta\in[0,\infty):\left\|\vec{r}\,'(\theta)\right\|&=\sqrt{(-e^{-\theta}(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)))^2+(e^{-\theta}(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)))^2+(-e^{-\theta})^2}\\&=e^{-\theta}\sqrt{(\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta))^2+(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))^2+1}\\&=e^{-\theta}\sqrt{\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)-2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)+1}\\&=e^{-\theta}\sqrt{2(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))+1}=\sqrt{3}e^{-\theta}>0\end{aligned}$$

Por lo que $\forall\theta\in[0,\infty):\|\vec{r}\,'(\theta)\|\neq 0$, en consecuencia la trayectoria es regular.

P4 (b) Se pide calcular el largo de Γ.

Para hacer esto se recurre a la integral de largo de curva:

$$L(\Gamma)=\int_0^\infty\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right\|\mathrm{d}\theta=\int_0^\infty\sqrt{3}e^{-\theta}\,\mathrm{d}\theta=\left[-\sqrt{3}e^{-\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta\to\infty}=0-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$$

P4 (c) Se pide encontrar la parametrización natural de Γ.

Para realizar lo pedido se utiliza la función de longitud de arco:

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right\| \mathrm{d}\theta = \int_0^t \sqrt{3}e^{-\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[-\sqrt{3}e^{-\theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=t} = -\sqrt{3}e^{-t} - (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}(1-e^{-t})$$

Donde la expresión de t en función de s corresponde a $t = \ln\big(\sqrt{3}/(\sqrt{3}-s)\big)$ (ver P3 (a) para el desarrollo análogo), de esta forma la parametrización natural corresponde a:

$$\sigma(s) = \vec{r}(t(s)) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s}\right)\right) \\ \left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \operatorname{sen}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s}\right)\right) \\ 1 - \frac{s}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Pregunta 5 Se pide considerar la curva Γ parametrizada por $\sigma(t) = (e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t), e^t), t \in \mathbb{R}$.

P5 (a) Se pide demostrar que la curva se mueve sobre el manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Para demostrar esto, denotamos el manto del cono como $\mathcal{M}$, así que lo que se pide mostrar es que:

$$\Gamma \subseteq \mathcal{M} \Leftrightarrow (\vec{x} \in \Gamma \Rightarrow \vec{x} \in \mathcal{M})$$

Así, como cada punto de Γ cumple la parametrización, cada punto de $\mathcal{M}$ cumple la ecuación del manto del cono, entonces $\forall \vec{x} \in \Gamma, \exists t \in \mathbb{R} : \vec{x} = (e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t), e^t)$ en donde:

$$(e^t\cos(t))^2 + (e^t\operatorname{sen}(t))^2 = e^{2t}(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)) = e^{2t} = (e^t)^2$$

Por lo que se afirma que cada punto de Γ cumple la ecuación de $\mathcal{M}$, es decir:

$$\forall \vec{x} \in \Gamma : \vec{x} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \Gamma \subseteq \mathcal{M}$$

Que es lo que se quería demostrar.

P5 (b) Se pide calcular el vector tangente y normal, probando que este último es tangente al eje Z en cualquier punto de la curva.

Para realizar los cálculos pedidos, notar que:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} e^t(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)) \\ e^t(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) \\ e^t \end{pmatrix}$$

Por lo que la normal de esta derivada resulta:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\right\| &= \sqrt{(e^t(\cos(t)-\operatorname{sen}(t)))^2+(e^t(\cos(t)+\operatorname{sen}(t)))^2+(e^t)^2}\\ &= e^t\sqrt{(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))^2+(\cos(t)+\operatorname{sen}(t))^2+1}\\ &= e^t\sqrt{\cos^2(t)-2\cos(t)\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)+2\cos(t)\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}^2(t)+1}\\ &= e^t\sqrt{2(\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t))+1}=\sqrt{3}e^t\end{aligned}$$

Así, el vector tangente corresponde a:

$$\vec{T}(t)=\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\right\|=\begin{pmatrix}(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))/\sqrt{3}\\(\cos(t)+\operatorname{sen}(t))/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Donde la derivada de este vector y la norma de esta corresponden a:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-(\cos(t)+\operatorname{sen}(t))\\\cos(t)-\operatorname{sen}(t)\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| &= \frac{\sqrt{(-(\cos(t)+\operatorname{sen}(t)))^2+(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))^2}}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{\cos^2(t)+2\cos(t)\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)-2\cos(t)\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}^2(t)}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2(\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t))}}{\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

De donde se puede calcular finalmente el vector normal:

$$\vec{N}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\right\|=\begin{pmatrix}-(\cos(t)+\operatorname{sen}(t))/\sqrt{2}\\(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

Notar que este es perpendicular al eje Z en todo punto, ya que:

$$\vec{N}(t)\cdot\hat{z}=\begin{pmatrix}-(\cos(t)+\operatorname{sen}(t))/\sqrt{2}\\(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0+0+0=0$$

P5 (c) Se pide calcular el vector binormal, la curvatura y la torsión.

Respecto a la curvatura, es directo que:

$$\kappa(t)=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t}\right\|\Big/\left\|\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\right\|=\frac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{3}e^t}=\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{3}$$

El vector binormal por otra parte, se calcula como:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) &= \begin{pmatrix} (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))/\sqrt{3} \\ (\cos(t) + \operatorname{sen}(t))/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))/\sqrt{2} \\ (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))/\sqrt{3} & (\cos(t) + \operatorname{sen}(t))/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))/\sqrt{2} & (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{sen}(t) - \cos(t))/\sqrt{6} \\ (\operatorname{sen}(t) + \cos(t))/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En donde:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} (\cos(t) + \operatorname{sen}(t))/\sqrt{6} \\ (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente, la torsión, corresponde a:

$$\begin{aligned}
\tau(t) = -\vec{N}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}s} \Big/ \left\| \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} \right\| &= - \begin{pmatrix} -(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))/\sqrt{2} \\ (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\cos(t) + \operatorname{sen}(t))/\sqrt{6} \\ (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} /(\sqrt{3}e^t) \\
&= \frac{-(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))^2/\sqrt{12} + (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))^2/\sqrt{12}}{\sqrt{3}e^t} \\
&= \frac{-\cos^2(t) - 2\cos(t)\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) - 2\cos(t)\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^2(t)}{\sqrt{36}e^t} = \frac{-4\cos(t)\operatorname{sen}(t)}{6e^t} \\
&= -\frac{2\operatorname{sen}(t)\cos(t)e^{-t}}{3}
\end{aligned}$$