Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002-1,3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Pauta Auxiliar 2 (Grupo 2)

Repaso integración multivariable

19 de junio de 2019

Profesora: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Pregunta 1 En esta pregunta se pide calcular $\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ y se sugiere utilizar el teorema de Fubini dos veces.

Efectivamente, esta corresponde a una integral iterada que se puede expresar como:

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \doteq \int_0^1 I(z)\,\mathrm{d}z$$

Ahora notemos que la integral que representa $I(z)$ toma $z \in [0,1]$ fijo, por ende se puede desarrollar como:

$$I(z) = \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{(\star)}{=} \int_z^1 \int_z^x e^{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_z^1 (x-z)e^{x^3}\,\mathrm{d}x$$

Hecho esto y retornando a la integral original, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_z^1 (x-z)e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^x (x-z)e^{x^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x^3} \left(\int_0^x (x-z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 e^{x^3} \left[-\frac{(x-z)^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x^3} \left[-\left(0 - \frac{x^2}{2} \right) \right] \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{x^3}}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e-1}{3} = \frac{e-1}{6}\end{aligned}$$

Respecto a la igualdad $(\star)$ e intercambio de variables x e y, lo importante es notar la región que estas variables están recorriendo al integrar, notar que si z es fijo, en la integral de la izquierda y recorre el intervalo $[z,1]$ completo, posteriormente para cada y en ese intervalo x recorre desde y hasta 1, es decir $[y,1]$, esto se puede ver gráficamente como la región de la izquierda de la fig. 1 (pág. siguiente).

En el caso de este uso del teorema, lo que se quiere es invertir el orden en que se recorren estas variables, por ende lo que hay que identificar ahora, es qué intervalo recorre x para un z fijo, en este caso, también es $[z,1]$, por otro lado para cada x, vemos que y recorre desde la altura z hasta la altura x, es decir $[z,x]$, esto se puede ver gráficamente como la región de la derecha (idéntica a la de la izquierda) de la fig. 1. Así, si denominamos la región como R, las siguientes igualdades para este caso son totalmente equivalentes.

$$\iint_R e^{x^3}\,\mathrm{d}A = \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_z^1 \int_z^x e^{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Para la siguiente aplicación de Fubini, tiene que hacerse un análisis similar.

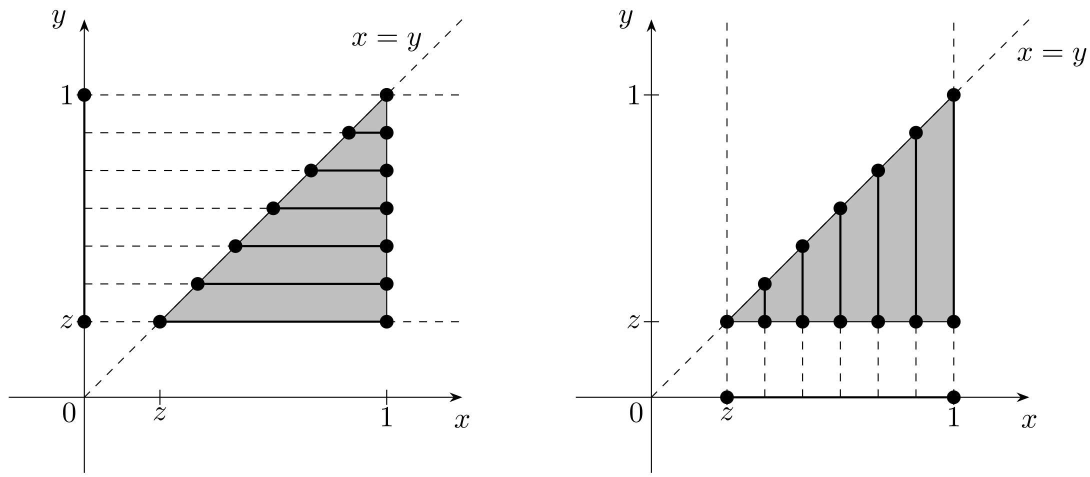

Figura 1: Región de integración R

Pregunta 2 En esta pregunta se pide demostrar que $\iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$, considerando $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ simétrico y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua e impar, para esto se sugiere estudiar y usar la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $T(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$.

Analizando la transformación de la indicación, se tiene que:

$$T(\mathbf{x}) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

En donde $T_x = -x$, $T_y = -y$ y $T_z = -z$, el jacobiano de esta transformación corresponde a:

$$J_T(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_x}{\partial x} & \frac{\partial T_x}{\partial y} & \frac{\partial T_x}{\partial z} \\ \frac{\partial T_y}{\partial x} & \frac{\partial T_y}{\partial y} & \frac{\partial T_y}{\partial z} \\ \frac{\partial T_z}{\partial x} & \frac{\partial T_z}{\partial y} & \frac{\partial T_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(-x)}{\partial x} & \frac{\partial(-x)}{\partial y} & \frac{\partial(-x)}{\partial z} \\ \frac{\partial(-y)}{\partial x} & \frac{\partial(-y)}{\partial y} & \frac{\partial(-y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(-z)}{\partial x} & \frac{\partial(-z)}{\partial y} & \frac{\partial(-z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}_3$$

Considerando $\mathbb{I}_3$ como la matriz identidad de 3×3, de esta forma, se llega a que $\det(J_T(x, y, z)) = \det(-\mathbb{I}_3) = -1$. Por otro lado, notar que $\forall x \in A : T(x) = -x \in A$, de esta forma $T(A) = A$, así, aplicando el teorema de cambio de variable:

$$\iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \iiint_{T(A)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \iiint_A f(T(\mathbf{u}))\,|\det(J_T(\mathbf{u}))|\,\mathrm{d}\mathbf{u} = \iiint_A f(-\mathbf{u})|-1|\,\mathrm{d}\mathbf{u} = -\iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Con esto calculado se puede concluir directamente que:

$$\iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \Rightarrow 2\iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

Pregunta 3 Esta pregunta se divide en dos subpreguntas:

P3 (a) Se pide determinar el volumen de la región delimitada por $x^2+y^2+z^2=a^2$, los planos $x=y$ e $y=\sqrt{3}x$, dentro de los semiespacios $x\geq 0$ e $y\geq 0$.

Para esto se usan coordenadas esféricas, donde $x=r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)$, $y=r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)$ y $z=\cos(\theta)$. Notemos que la esfera define un límite tipo $r\in[0,a]$, recordando que para un punto en esféricas que cumpla $x\geq 0\wedge y\geq 0$, se tiene que $\phi=\arctan(y/x)$, de esta forma:

$$x=y\Rightarrow\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan\left(\frac{x}{x}\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$
$$y=\sqrt{3}x\Rightarrow\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{x}\right)=\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

De esta forma, este par de planos define un límite tipo $\phi\in[\pi/4,\pi/3]$, finalmente, no existe restricción sobre el ángulo θ, por lo que $\theta\in[0,\pi]$, así, se puede plantear la integral de volumen, si denominamos como F la región esto queda:

$$\iiint_F \mathrm{d}V=\int_0^a\int_0^\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=\int_0^a r^2\,\mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\phi$$
$$=\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=a}\cdot[-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi}\cdot[\phi]_{\phi=\pi/4}^{\phi=\pi/3}=\frac{a^3}{3}\cdot(1+1)\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi a^3}{18}$$

P3 (b) Se pide calcular $\iint_E\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A$ donde E es la intersección del disco $(x-a)^2+y^2\leq a^2$, con $a>0$ y la región $|y|<x$.

Notar que dada la función y la forma del espacio, conviene usar coordenadas polares, así, se tiene que $(x-a)^2+y^2\leq a^2\Leftrightarrow x^2+y^2\leq 2ax\Leftrightarrow r^2\leq 2ar\cos(\theta)\Leftrightarrow r\leq 2a\cos(\theta)$, mientras que la restricción $|y|<x$ supone $\theta\in[-\pi/4,\pi/4]$, así la integral pedida corresponde a:

$$\iint_E\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2a\cos(\theta)} r\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2a\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{8a^3\cos^3(\theta)}{3}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\theta)(1-\mathrm{sen}^2(\theta))\,\mathrm{d}\theta=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-u^2)\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{8a^3}{3}\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{u=-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{u=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{8a^3}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)=\frac{8a^3}{3}\cdot\frac{10}{6\sqrt{2}}=\frac{40a^3}{9\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}a^3}{9}$$

Pregunta 4 Esta pregunta se divide en cuatro subpreguntas que buscan calcular $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$:

P4 (a) Se pide encontrar el determinante de la transformación $P(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \doteq (P_x, P_y)$:

$$|J_P(r,\theta)| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial r} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P_y}{\partial r} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial (r\cos(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial (r\cos(\theta))}{\partial \theta} \\ \frac{\partial (r\,\mathrm{sen}(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial (r\,\mathrm{sen}(\theta))}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix}$$
$$= \left|r\cos^2(\theta) + r\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right| = \left|r(\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta))\right| = |r| = r$$

P4 (b) Se pide llegar a la igualdad $I \doteq \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$ utilizando el Teo. de Fubini.

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

P4 (c) Se pide llegar a que $I = \pi$ utilizando coordenadas polares.

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2+y^2}\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_{r=0}^{r\to\infty} \cdot [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

P4 (d) Se pide concluir el valor de la integral de Gauss.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{I} = \sqrt{\pi}$$