FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 2 (Grupo 2)

Repaso integración multivariable

23 de marzo de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Teorema de Fubini
Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ y $f : R \to \mathbb{R}$, una función integrable, y tal que las funciones:

$$x \in R_1 \mapsto \int_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad ; \quad y \in R_2 \mapsto \int_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Están bien definidas y son integrables. Entonces se tiene validez de las igualdades:

$$\iint_R f = \int_{R_1}\left(\int_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{R_2}\left(\int_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Teorema del cambio de variable
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $\mathcal{D}'$ una región abierta y acotada con $\mathrm{Adh}(\mathcal{D}') \subset \Omega$, y suponiendo que T es inyectiva en $\mathcal{D}'$, que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in \mathcal{D}'$ y que $\mathcal{D} = T(\mathcal{D}')$ es un abierto. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces la siguiente igualdad es válida:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{D}'} f(T(u))\left|\det(T'(u))\right|\mathrm{d}u$$

P1 Calcule la siguiente integral:

$$\int_0^1\int_z^1\int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Indicación: Utilize el Teorema de Fubini dos veces, cambiando el orden de integración adecuadamente.

P2 Dado un conjunto simétrico $A \subseteq \mathbb{R}^3$, es decir $\mathbf{x} \in A \Leftrightarrow -\mathbf{x} \in A$, y una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua e impar, muestre que:

$$\iiint_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

Indicación: Estudie y use en forma adecuada la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$.

P3 (a) Determinar el volumen de la región limitada por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y los planos $x = y$ e $y = \sqrt{3}x$ y que está dentro de $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(b) Calcular:

$$\iint_E \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A$$

Donde E es la intersección del disco $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$ donde $a > 0$ y la región $|y| \leq x$.

P4 **[Propuesto]** La siguiente integral, llamada Integral de Gauss posee una variedad de aplicaciones, principalmente en la teoría de probabilidades, esta corresponde a la integración a lo largo de la recta real de la función gaussiana e^{-x^2}, posee un valor relativamente sencillo de calcular a lo largo de $\mathbb{R}$.

El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

(a) Calcule el determinante de la transformación de coordenadas cartesianas a polares, es decir, de $(x, y) = P(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$.

(b) Utilizando Fubini logre la siguiente igualdad:

$$I \doteq \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

(c) Utilizando lo encontrado en (a) llegue a que $I = \pi$.

(d) Concluya y entregue el valor de la integral de Gauss.