P1 Pauta Aux 9

1. Recordamos que

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Entonces $\sin(zi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(zi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (i)^{2n+1} \cdot \frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (i^2)^n \cdot \frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$= i \sinh(z)$ //

2. $\oint_{|z|=1} \operatorname{Im}(z)\, dz$, $\{|z| = 1\}$ es la circunferencia unitaria, lo parametrizamos como $\{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$, reescribimos

$$\oint_0^{2\pi} \operatorname{Im}(e^{i\theta})\, d\theta = \oint_0^{2\pi} \sin(\theta)\, d\theta = (-\cos(\theta))\Big|_0^{2\pi} = 0$$

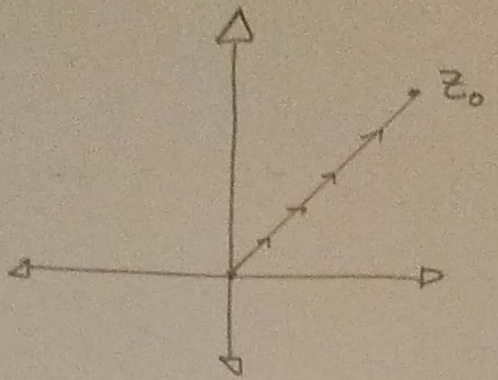
Porque $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

P1)

PAUTA AUX 9

c)

$$\int_{[0,z_0]} Re(z)\, dz$$



El segmento $[0, z_0]$ se parametriza como $\{\lambda z_0,\ \lambda \in [0,1]\} = \Gamma$

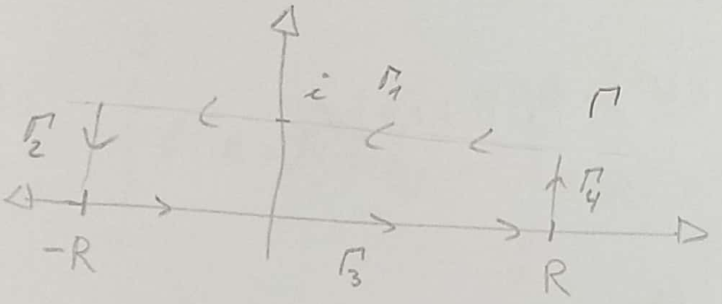
si además $z_0 = x_0 + y_0 i$, $\Gamma = \{\lambda x_0 + \lambda y_0 i,\ \lambda \in [0,1]\}$

$$\int_{[0,z_0]} Re(z)\, dz = \int_0^1 \lambda x_0 = x_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{x_0}{2}$$ //

P2| PAUTA AUX 9

Sea $P(z)$ un polinomio a coeficientes reales. Definimos $f(z) = \exp(-z^2)P(z)$

Integraremos $f(z)$ sobre la región



Luego tomaremos $\lim_{R\to\infty}$

$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$ porque Γ es cerrada y f es holomorfa

Luego $Im\left(\oint_\Gamma f(z)\,dz\right) = 0$

Veamos integral por integral

$$-\int_{-R}^{R} f(i+x)\,dx = -\int_{-R}^{R} \exp(-(i+x)^2)\,P(i+x)\,dx$$

$$\exp(-(i+x)^2) = \exp(1-2xi-x^2) = e\cdot\exp(-x^2)\cdot\exp(-2xi)$$

$$Im\left(-\int_{-R}^{R} f(i+x)\,dx\right) = -e\int_{-R}^{R}\exp(-x^2)\,Im\left(\exp(-2xi)P(i+x)\right)dx$$

Porque $\exp(-x^2)$ es real, puedo sacarlo del paréntesis

Γ_2:
$$\int_1^0 \exp(-(-R+iy)^2)\, P(-R+iy)\, dy = \quad (*)$$

$$-(-R+yi)^2 = -R^2 + 2Ryi + y^2$$

$$(*) = -\exp(-R^2) \int_0^1 \exp(2Ryi + y^2) \cdot P(-R+iy)\, dy$$

Ahora, $|\exp(2Ryi)| = 1$ y

$|\exp(y^2)| \leq \exp(1)$

Como $\exp(-R^2)$ decrece más rápido que cualquier polinomio, puedo tomar R suficientemente grande tal que

$$|(*)| \leq \left| e \cdot -\exp(-R^2) \int_0^2 P(-R+iy)\, dy \right| < \varepsilon$$

es decir cuando $R \to \infty$ la integral tiende a 0.

Escaneado con CamScanner

Γ_3:

$$\int_{-R}^{R} \exp(-x^2)P(x)\,dx$$

Cómo x es real y $P(x)$ es de coeficientes Reales $\mathrm{Im}\left(\int_{-R}^{R}\exp(-x^2)P(x)\,dx\right)=0$

Γ_4:

$$\int_0^1 f(R+iy)\,dy = \int_0^1 \exp(-R^2-2Ryi+y^2)\,P(yi+R)\,dy$$

Usando el mismo argumento que en Γ_2

$\exp(y^2) \le \exp(1)$, $|\exp(-2yRi)| = 1$

$$\left|\int_0^1 \exp(-R^2-2Ryi+y^2)P(iy+R)\,dy\right| \le \exp(-x^2+1)\left|\int_0^1 P(iy+R)\,dy\right|$$

Pero como P es polinomio, su primitiva es $\bar{P}$ también polinomio, entonces

$$\le \exp(-x^2+1)\cdot\left(\bar{P}(iy+R)\right)\Big|_0^1$$

y como $\exp(-x^2)$ decrece más rápido que $\bar{P}$, esto tiende a 0.

Γ:

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Im}\left(\oint_\Gamma f(z)\,dz\right) = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Im}\left(\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \overset{0}{\cancel{\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz}} + \overset{0}{\cancel{\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz}} + \overset{0}{\cancel{\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz}}\right)$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{Im}\left(\exp(-2xi)\,P(i+x)\right) = 0$$

P3)

PAUTA AUX 9

Comenzamos usando la fórmula de integración de Cauchy con $f(z) = (z+a)^n$

$$\frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} = f^{(k)}(0)$$

$$((z+a)^n)' = n(z+1)^{n-2}$$

$$((z+a)^n)'' = n(n-2)(z+1)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$((z+a)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(z+1)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 1^{n-k}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Escaneado con CamScanner

P3) Pauta Aux 9

Ahora mostraremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

Primero reemplazamos por la fórmula anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} \oint_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} = \oint_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{(z+1)^2}{5z} \right)^n \cdot \frac{1}{z}\, dz$$

Queremos que $\left|\left(\frac{(z+1)^2}{5z}\right)\right| < 1$ para usar la fórmula de la suma geométrica.

Elejimos Γ que cumpla aquello, es decir

$$\left| \frac{(z+1)^2}{5z} \right| < 1 \longrightarrow |(z+1)^2| < 5|z|$$

si tomamos $\Gamma = \{Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ es decir una circunferencia de radio R,

$$|(z+1)^2| < 5R$$

el máximo de $|(z+1)^2|$ es cuando $z = R$

Por lo tanto

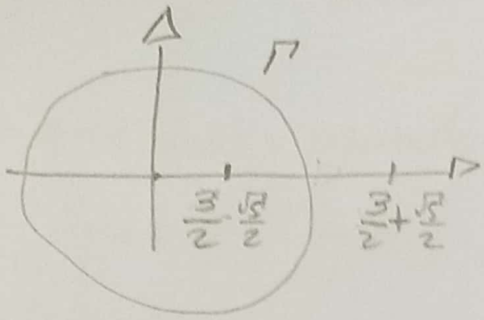
$$(R+1)^2 < 5R \longrightarrow 0 < 5R - R^2 - 2R - 1$$

$$0 < 3R - R^2 - 1$$

La igualdad se obtiene en

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{-2} = \frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ es decir}$$

$$R \in \left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right]$$



y $\left|\frac{(z+1)^2}{5z}\right| < 1 \quad \forall z \in \Gamma$

Volviendo a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z+1)^2}{5z}\right)^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z+1)^2}{5z}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{5}{3z-z^2-1}\,dz$$

$3z - z^2 - 1$ tiene dos polos, $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

y se escribe como $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-z\right)\cdot\left(z-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

Usamos nuevamente la fórmula integral de Cauchy, con el polo $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$= \frac{5}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-z\right)}}{z-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = 5\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-z}\right)_{z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \;//$$

Escaneado con CamScanner