Auxiliar 2

Teorema de Green

Profesor: Jaime Ortega
Auxiliares: Ignacio Fierro, Ignacio Riego
Ayudantes: Amal Zhgeib, Gustavo Muñoz, Vicente Salinas

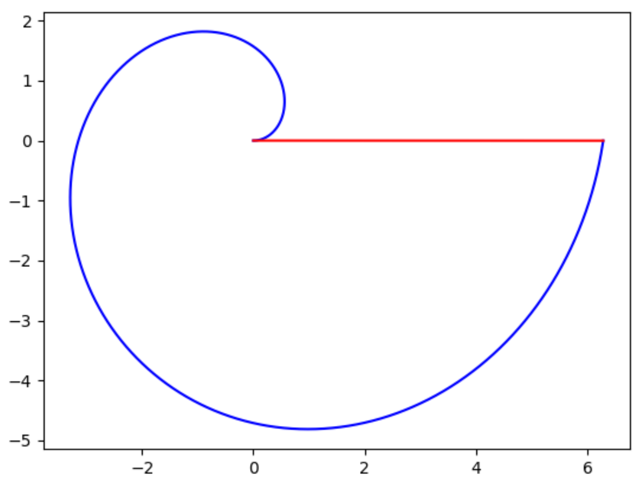
P1

La siguiente espiral está definida por la ecuación

$$x(t) = t\cos(t)$$

$$y(t) = t\sin(t)$$

Con $t \in [0, 2\pi]$. Y cerrada por un segmento del eje X. Calcule el àrea contenida dentro de la figura.



Solución

Primer paso: Definir P y Q convenientes. Necesitamos calcular el àrea de la figura, es decir, necesitamos integrar 1 sobre toda el àrea. Con esto deducimos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Hay muchas posibles elecciones para P y Q, en este caso conviene $P(x,y) = -\frac{y}{2}, Q(x,y) = \frac{x}{2}$. Esta elección es por ensayo y error, pero el hecho de que la curva tenga una cierta simetría nos puede ayudar a decidir.

Ahora escribimos la fórmula de Green

$$\int\int_{espiral} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint Pdx + Qdy$$

La integral de curva se puede calcular separadamente para la recta y la espiral. En el caso de la recta $y = dy = 0$, por lo que nos podemos concentrar en la espiral.

Calculemos dx y dy.

$$x = t\cos(t), \quad dx = (\cos(t) - t\sin(t))dt$$

$$y = t\sin(t), \quad dy = (\sin(t) + t\cos(t))dt$$

Por lo tanto

$$\oint Pdx + Qdy = \oint \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

Con

$$xdy = (t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos^2(t))dt$$

$$ydx = (t\sin(t)\cos(t) - t^2\sin^2(t))dt$$

Reemplazando

$$\oint Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{2}dt = \frac{t^3}{6}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{6}$$

P2

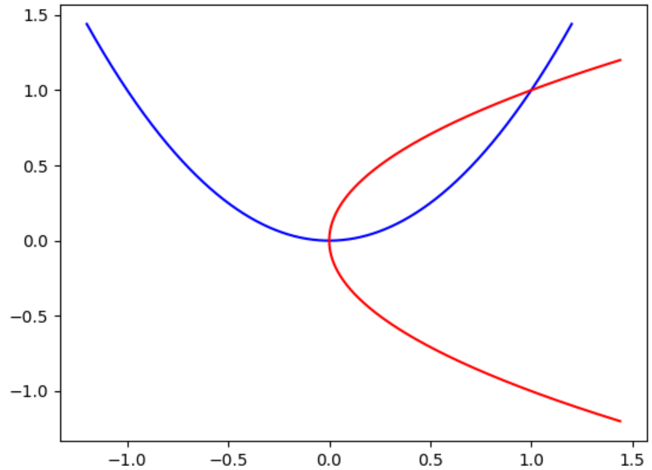
Use la fórmula de Green para calcular

$$\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

Donde γ es el borde orientado del àrea definida por la intersección de las curvas $x = y^2$ y $y = x^2$.

Solución:

Primero vamos a dibujar las curvas para hacernos una idea



Va a ser difícil calcular la integral directamente, por lo que usaremos nuevamente la fórmula de Green.

$$\oint Pdx + Qdy = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Del dibujo nos podemos dar cuenta que la sección que nos interesa es cuando la curva azul ($y = x^2$) es menor. Esto quiere decir que nuestra región de integración, para cada x es $\sqrt{x} \leq y \leq x^2$, este intervalo es vacío fuera de la región que nos interesa y las igualdades se alcanzan en $x = 0$ y $x = 1$.

Ahora determinemos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

$$P(x, y) = (2xy - x^2), \;\; \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

$$Q(x, y) = (x + y^2), \;\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Juntamos todo esto en la ecuación

$$\int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx =$$

$$\int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^3 =$$

$$\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} - \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

P3

Definimos en todo el espacio excepto el origen

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (x,y,z) \neq 0$$

Calcule el laplaciano $\Delta f(x,y,z)$ usando coordenadas polares y luego usando coordenadas ortogonales.

Solución:

Primero en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Reemplazando x por cualquier otra coordenada es fácil ver que obtendremos resultados equivalentes, por lo tanto

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{2x^2-2x^2+2y^2-2y^2+2z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

Ahora veremos que en coordenadas esféricas es sorprendentemente fácil. Primero recordemos $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Gracias a esto podemos reescribir

$$f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}$$

Sólo nos van a importar las derivadas parciales respecto a r ya que el resto serán siempre 0.

$$\frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(r,\theta,\varphi)}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}$$

¡Pero esto no es cero! ¿Qué pasó?

Hay que recordar usar la fórmula del laplaciano en esféricas

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial f}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial f}\left(r^2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial f}(-1) = 0$$

Que es lo que queríamos