Pauta Auxiliar 3 (Sección 1)

Repaso curvas

06 de abril de 2020

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Camilo Gomez, Javiera Palominos, Camilo Ramírez

Pregunta 1 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $|a| > 0$.

P1 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, cerrada, simple o regular.

Referido a cada elemento pedido:

- Sobre si es suave, basta notar que las coordenadas de $\vec{r}(t)$: $a\cos(t)$ y $a\,\mathrm{sen}(t)$ son funciones $\mathcal{C}^1$, ya que estas forman las coordenadas de $\vec{r}(t)$, se tiene que $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$ por lo que la parametrización es suave.
- Sobre si es cerrada, notar que $\vec{r}(0) = (a\cos(0), a\,\mathrm{sen}(0)) = (a, 0)$ y $\vec{r}(2\pi) = (a\cos(2\pi), a\,\mathrm{sen}(2\pi)) = (a, 0)$, por lo que efectivamente $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$, lo que implica que la curva es cerrada.
- Sobre si es simple, notamos que no lo es ya que $\vec{r}$ no es inyectiva, esto ya que existen $t_1 = 0$ y $t_2 = 2\pi$ tales que $t_1 \neq t_2$ y $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$, esto es una consecuencia directa de que la curva sea cerrada.
- Sobre si es regular, notemos que efectivamente es suave, y solo basta verificar que $\forall t \in I, \vec{r}(t) \neq \mathbf{0}$, en efecto, $\vec{r}\,'(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t))$, donde:

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = \sqrt{(-a\,\mathrm{sen}(t))^2 + (a\cos(t))^2} = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + a^2\cos^2(t)} = \sqrt{a^2} = |a| > 0$$

  De esta forma $\forall t \in [0, 2\pi]$ se tiene que $\|\vec{r}\,'(t)\| > 0 \Leftrightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0 \Leftrightarrow \vec{r}(t) \neq (0, 0)$, por lo que la curva es regular.

P1 (b) Se pide encontrar una parametrización en longitud de arco para la curva.

Para comenzar a resolver esta pregunta, se debe calcular la función de longitud de arco, es decir:

$$s(t) = \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(u)}{\mathrm{d}u}\right\| \mathrm{d}u = \int_0^t |a|\,\mathrm{d}u = [|a|u]_{u=0}^{u=t} = |a|t$$

Teniendo $s(t)$ calculada, se puede expresar t en función de s de forma sencilla, $t(s) = s/|a|$, finalmente, reemplazando en la parametrización dada originalmente, se obtiene la parametrización en longitud de arco para la curva:

$$\sigma(s) = \vec{r}(t(s)) = \begin{pmatrix} a\cos(s/|a|) \\ a\,\mathrm{sen}(s/|a|) \end{pmatrix}$$

Donde $s \in [0, L(\Gamma)] = [0, s(2\pi)] = [0, 2\pi|a|]$.