

Probar que $\|f\|_1$ es norma del espacio de Funciones continuas en $[0,1]$ (i.e. $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ es un e.v.m.)

$$\text{Sea } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{Para} \\ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{continua} \end{array} \right)$$

Observaciones Previas:

- $C([0,1])$ es un espacio vectorial, pues siempre $\forall f, g \in C([0,1]), \forall \lambda \in \mathbb{R}; \lambda f + g \in C([0,1])$ (Por álgebra de continuas, clásica)

Pero ¿Podemos explicitar una Base para este conjunto?

¿Existen n elementos Fijos que me permitan escribir:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i(x) \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R}; e_i \text{ un elemento de la Base?}$$

$e_i \in C([0,1]) \quad \forall i$

No, pues $C([0,1])$ es un espacio vectorial de Dimensión INFINITA. Y por lo mismo no cumple todas las propiedades dadas de $\mathbb{R}^n$ (o en su defecto, cualquier otro espacio de Dimensión Finita).

Por ejemplo, en $C([0,1])$ NO TODAS las Normas son equivalentes (y ya lo veremos;)).

✓ Son equivalentes (y ya lo veremos ;)).

Veamos que $\|f\|_1$ es una Norma.

• ¿ $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$?

En efecto, $\forall t \in [0,1]; f(t) \in \mathbb{R}$ (Pues $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$)

y así, $|f(t)|$ está bien definido en $\mathbb{R}$ y es tal que:

$|f(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$ i pues $|\cdot|$ es norma en $\mathbb{R}$.

Pero Luego, Aquí entra una propiedad de la
integrales que veremos Mucho...

Prop 4.4
Apunte "Cálculo
Diferencial"

OO (OO con oro)

$$s: 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



Por ejemplo, como $0 \leq 0 \leq |f(x)| \Rightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$$

(Y como $f \in C([0, 1])$ era
Arbitraria, se tiene $\forall f$)

¿ $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$?

En efecto, ¿ para $f \in C([0, 1])$: Propiedad
Módulo

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = \int_0^1 \underline{|\lambda|} \cdot |f(t)| dt$$

y $|\lambda| \geq 0$ de sale
de la integral : $= \underline{|\lambda|} \cdot \int_0^1 |f(t)| dt$
 $= |\lambda| \cdot \|f\|_1$

i.e; para $f \in C([0, 1])$ cualquiera; $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ ✓✓

• ¿ $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$?

Sean $f, g \in C([0,1])$ arbitrarias, notemos que:

$$\forall t \in [0,1]: |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$$

Pues el módulo $|\cdot|$ es una norma en $\mathbb{R}$
(Y, en particular, $\forall t \in [0,1], f(t) + g(t) \in \mathbb{R}$)

Pero luego Hoho! Podemos usar $\textcircled{A}$

$$0 \leq \underbrace{|f(t) + g(t)|}_{F(t)} \leq \underbrace{|f(t)| + |g(t)|}_{G(t)} \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 F(t) dt \leq \int_0^1 G(t) dt \Rightarrow \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt$$

Tenemos que: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ cumple:

$$\underbrace{\bullet \|f\|_1 \geq 0} \quad \bullet \underbrace{\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1}$$

Y estamos viendo que:

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \underbrace{\int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt}_{\leq \left(\int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt \right)}$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \checkmark$$

$\therefore \|\cdot\|_1$ cumple la Desigualdad Triangular. $\checkmark$

Ahora, sólo queda la Real peluca: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Y el truco de que esto} \\ \text{es sobre las Funciones} \end{array} \right\}$

... me desig... ..

Ahora, sólo queda la Real peluca: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Y el truco de que esto} \\ \text{es sobre las funciones} \\ \text{CONTINUAS} \end{array} \right\}$

• ¿ $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$?

(i.e.: $f(t) = 0 \forall t \in [0,1]$)

$\Leftarrow$ En efecto, No es complejo notar que:

S: $f(t) = 0; \forall t \in [0,1] \Rightarrow |f(t)| = 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 0 dt = 0 \quad \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \quad \checkmark$

$\Rightarrow$ ¿Tenrá que ser que si $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt = 0$ entonces la ÚNICA función continua en $[0,1]$ que satisfaga eso será idénticamente 0?

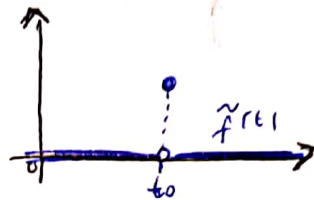
Les pregunto: ¿Hasta Ahora hemos usado que las funciones $f \in C([0,1])$ son CONTINUAS?

¡No! Y de hecho, tiene toda la pinta de que esto podría funcionar para cualquier función integrable (por ejemplo, si fueran solamente Acotadas)

¿ Pero y Por qué no sirve en las Acotadas ?

(Traten de pensar en una que no cumpla $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$)

Si no lo pensaron, igual
SPOILER ALERT, aquí
le pongo un ejemplo



$$\text{Sea: } \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq t_0 \\ 1 & t = t_0 \end{cases}$$

Es claro que $\int_0^1 |\tilde{f}(t)| dt$ será igual a CERO (Pues un punto por sí solo no aporta NADA a la integral; ¿Cuál podría ser el Área Abajo de un punto? No tiene sentido)

(Dato Extra: en este espacio $\|f\|_1$ define sólo una "seminorma")

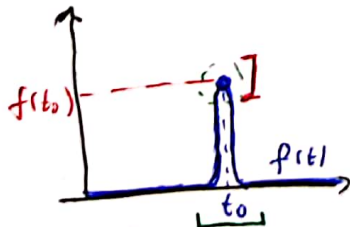
YAA, BACÁN, pero sigo sin atacar el problema de cómo lo hago funcionar para $f \in C([0,1])$.

Usemos el Hecho que f es continua (Por 1ª y única vez)

¿ Por qué no puede pasar lo mismo que con las Acotadas?

Porque alrededor de cada $f(t_0)$ debe haber más valores de la Función, porque es continua.

Vale decir:



Si algún punto se me "escapa" del 0, debe haber otros puntos cercanos a t_0 talq que $f(t)$ esté arbitrariamente cerca de t_0 . (Pues $\forall \epsilon > 0$, blabla...)

Bueno; entonces:

Por contradicción: [Recordemos que para $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$]

Sea que $\exists \tilde{f} \neq 0$ (i.e.: $\exists t_0 \in [0,1]$ tq $\tilde{f}(t_0) \neq 0$)
pero que cumple $\|\tilde{f}\|_1 = 0$. (con $\tilde{f} \in C([0,1])$)

En efecto, como $\tilde{f} \in C([0,1])$ es continua, y el módulo
en $\mathbb{R}$ también es continua; $\Rightarrow |\tilde{f}(t)|$ es una función continua.

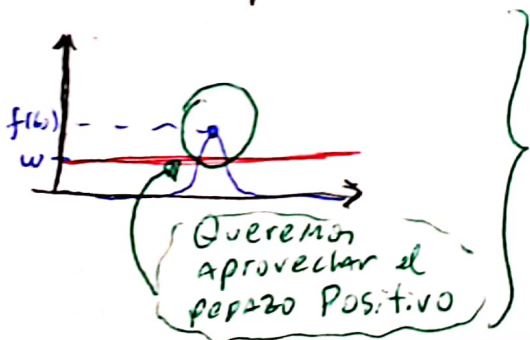
Y como $\tilde{f}(t_0) \neq 0 \Rightarrow \underline{|\tilde{f}(t_0)| > 0}$ (por $|\tilde{f}(t_0)|$ será $\neq 0$)

En particular; $|\tilde{f}(t_0)| > w = \frac{|\tilde{f}(t_0)|}{2} > 0$

Y como $|\tilde{f}(t)|$ es continua (en particular en t_0)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \underline{|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t_0)| < \varepsilon}$

(¿Qué pasará si tomamos $\varepsilon = \frac{|\tilde{f}(t_0)|}{2}$?)



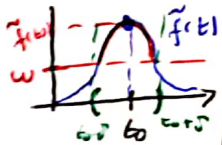
Tomemos, en particular; $\varepsilon = \frac{|\tilde{f}(t_0)|}{2} > 0$

Y recordemos que: $||\tilde{f}(t)| - |\tilde{f}(t_0)|| < \varepsilon \Leftrightarrow |\tilde{f}(t_0)| - \varepsilon < |\tilde{f}(t)| < |\tilde{f}(t_0)| + \varepsilon$

O sea: Si: $\varepsilon = \frac{|\tilde{f}(t_0)|}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow 0 < \frac{|\tilde{f}(t_0)|}{2} < |\tilde{f}(t)|$

O, reescrito bonito:

$\exists \delta > 0; \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]; 0 < w < |\tilde{f}(t)|$



¡Y listo! Ahora estudiamos $\|\tilde{f}\|_1$ (que por hipótesis es 0)

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^{t_0-\delta} |f(t)| dt + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |f(t)| dt + \int_{t_0+\delta}^1 |f(t)| dt$$

¡Ojo! que podría haber un problema si: $t_0 = 0$ o si $t_0 = 1$; pero les dejo pensar cómo solucionar esto de forma super simple ¡!

Como $|f(t)| \geq 0 \forall t \in [0, 1] \Rightarrow \int_0^{t_0-\delta} |f(t)| dt + \int_{t_0+\delta}^1 |f(t)| dt \geq 0 + 0 = 0$

Y así: $\|f\|_1 \geq 0 + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |f(t)| dt \stackrel{(*)}{\geq} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} w dt = w \cdot \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} 1 dt = 2 \cdot \delta \cdot w > 0$

¡Oh No! $\rightarrow \leftarrow$ Pero esto implica que $\|f\|_1 \neq 0$ ¡pero $\|f\|_1 = 0$ (por hipótesis).
Luego, NO puede ser que $f \neq 0$. (En conclusión, debe ser: $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$)

Para cerrar el Problema,

$\|f\|_1$ cumple todas las propiedades de NORMA
en $C([0,1])$. Luego, $(C([0,1]); \|\cdot\|_1)$
es un e.v.n.

¿De qué sirve esto? Ahora podemos MEDIR DISTANCIA
en un espacio de FUNCIONES. Puedo tener cierta idea de
cuánto se parecen 2 Funciones entre sí. Incluso,
puedo pensar en sucesiones de Funciones y en
cómo LA SUCECIÓN se puede "Acercar A un Límite"

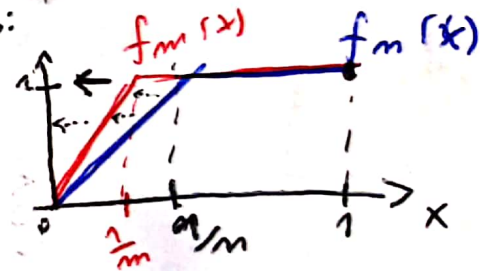
Por último, pensemos de nuevo en $C([0,1])$, pero con la norma:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

[Propuesto]: ; Prueben que es Norma!

- Consideren la sucesión de Funciones:

$$f_m(x) = \begin{cases} m \cdot x & ; \forall x \in [0, \frac{1}{m}] \\ 1 & , \forall x \in [\frac{1}{m}, 1] \end{cases}$$



- Prueben que es una sucesión de Cauchy para $\|f\|_1$ pero NO para $\|f_m\|_{\infty}$ (Luego, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_{\infty}$ NO son equivalentes)