MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 06: Funciones, Imagen y Preimagen

tiempo

Resumen

- **[Conjunto Imagen]**: Sea $f : A \longrightarrow B$ función, y $C \subseteq A$. Se define el conjunto imagen de C por f:

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

- **[Equivalencia epiyectividad]**: $f : A \longrightarrow B$ es epiyectiva si y solo si $f(A) = B$
- **[Propiedades Imagen]**:
  - I) $A \subseteq C \Longrightarrow f(A) \subseteq f(C)$
  - II) $f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C)$
  - III) $f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$
- **[Conjunto Preimagen]**: Sea $f : A \longrightarrow B$ función, y $D \subseteq B$. Se define el conjunto preimagen de D por f:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

- **[Propiedades PreImagen]**:
  - I) $B \subseteq D \Longrightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(D)$
  - II) $f^{-1}(B \cap D) = f(B) \cap f^{-1}(D)$
  - III) $f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$
- **[Inclusiones relevantes]**: Sea $f : A \longrightarrow B$, con $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, entonces:
  - $C \subseteq f^{-1}(f(C))$
  - $f(f^{-1}(D)) = D \cap f(A)$ En particular: $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$
- **[Inyectividad y sobreyectividad]**: Sea $f : A \longrightarrow B$ función. Se tiene:
  - I) f es inyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee (\exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$$

  - II) f es epiyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

  - III) f si es biyectiva, entonces:

$$\forall C \subseteq B, f^{-1}(\{y\}) = (\{f^{-1}(y)\})$$

- **[Relación]**: Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$
- **[Propiedades de relaciones]**: Una relación R en A es:
  - **Refleja**: si $\forall x \in A$, $x\mathcal{R}x$
  - **Simétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y y\mathcal{R}x$
  - **Antisimétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x$
  - **Transitiva**: $\forall x, y, z \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- **[Ejemplo de relación]**: En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.
- **[Relación de orden]**: $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, si es una relación **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.
  Observación: $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, xey son comparables, es decir $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.
- **[Relación de equivalencia]**:$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, si es una relación **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.

P1. PREGUNTA C1

a) Considere la siguiente colección de números reales definida por:

$$u_0 = 2$$
$$u_1 = 3$$
$$u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$

b) Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in (-1, 0]$. Probar que:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

P2. PREGUNTA C1

Sea $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones.

a) Sea $A \subseteq G$. Probar que:

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

b) Sea $B \subseteq F$. Probar que:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

P3. PREGUNTA C1
Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) & \longrightarrow & \mathcal{P}(U) \\ & (X, Y) & \longrightarrow & f((X, Y)) = X \setminus Y \end{array}$$

a) Demuestre que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \mid X \subseteq Y\}$

b) Determine $f(D)$, con $D = \{(X, X) \mid X \in \mathcal{P}(U)\}$

c) Demuestre que f es sobreyectiva.

d) ¿Es f biyectiva? Justifique.

P4. Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ una función.

a) Demuestre que $\forall A, B \subseteq F, f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$.

b) Demuestre que $\forall A, B \subseteq E, f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$, y que si f es inyectiva entonces se tiene la igualdad.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P5. Sean E, F y G conjuntos no vacíos. Sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones.

a) Demuestre que $(\forall A, B \subseteq E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)) \Leftrightarrow f$ es inyectiva.

b) Demuestre que $\forall A \subseteq G, (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

P6. Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ una función epiyectiva.

a) Demuestre que si $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ es una partición de F, entonces $\mathcal{E} = \{f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2), \cdots, f^{-1}(F_n)\}$ es una partición de E.

1) Intuición:
2) Teoría:
3) Matraca:

b) Demuestre que si f es además inyectiva y $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ es una partición de E, entonces $\mathcal{F} = \{f(E_1), f(E_2), \cdots, f(E_n)\}$ es una partición de F.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P7. Sea E un conjunto no vacío, y $K \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ de la siguiente forma: para $A, B \subseteq E$,

$$A \mathcal{R}_K B \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B.$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.

b) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es una relación de orden $\Leftrightarrow K = E$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

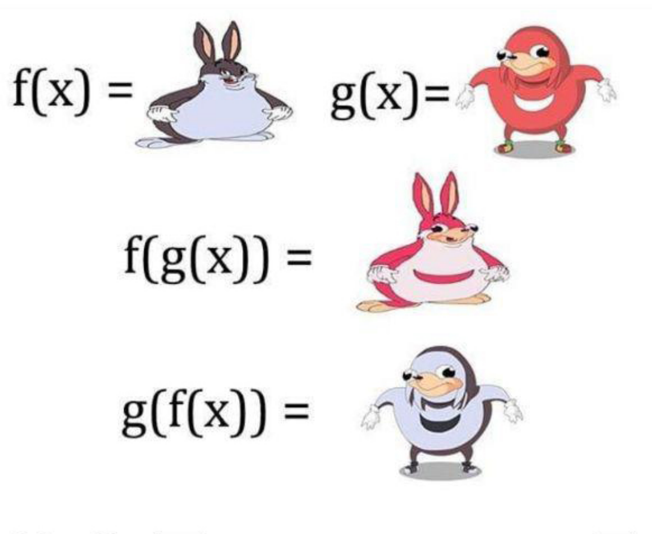
P8. a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ω dada por: $x \Omega y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$.
Demuestre que Ω es una relación de orden.

b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ como: $x \Phi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{Z}$.
Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:



‘Las funciones funcionan?”
Grandes pensadores