**MA1101-6 Introducción al Álgebra**
**Profesora:** Paulina Cecchi B.
**Auxiliar:** Patricio Yáñez Alarcón

# Ejercicio TPA #4

Junio de 2019

**P1.** ***¿Se cancela?***

Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ una ley de composición interna asociativa en $A$. Demuestre que el conjunto de los elementos cancelables de $A$ es cerrado, es decir, si $a, b$ son cancelables en $A$, entonces $a * b$ es cancelable en $A$.

**P2.** ***Engrupiendo***

Considere la siguiente operación en $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z)\Delta(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + x \cdot y')$$

*a*) Probar que $(\mathbb{R}^3, \Delta)$ es grupo.

*b*) Probar que:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (a, b, c, ) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z)\Delta(a, b, c) = (a, b, c)\Delta(x, y, z)\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

¿Es $(\mathbb{R}^3, \Delta)$ abeliano?.

*c*) Considere $G = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$, muestre que $\Delta$ es l.c.i. en $G$. De ahora en adelante asumiremos que $(G, \Delta)$ es grupo (es demostrable, pero no se pide hacerlo). Pruebe que es abeliano.

*d*) Probar que $(G, \Delta)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$, donde la suma en el plano real $\mathbb{R}^2$ es coordenada a coordenada.

**P3.** ***Más problemitas***

**P4.** ***Anillos*** GA $\to$ GA

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(A, \oplus, \odot)$ un anillo. Sea $f : K \to A$ morfismo entre $(K, +, \cdot)$ y $(A, \oplus, \odot)$ con $1_A \neq 0_A$. Demuestre que:

*a*)
- $f(0_K) = 0_A$
- $\forall x \in K,\ f(-x) = -f(x)$
- $(f(K), \oplus)$ es un subgrupo de $(A, \oplus)$

*b*) $f(x) = 0_A \Leftrightarrow x = 0_K$

*c*) $f$ inyectiva.

**Tiempo:** $|1hora|$

**Suerte!**

**P1.** ***¿Se cancela?***

Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ una ley de composición interna asociativa en $A$. Demuestre que el conjunto de los elementos cancelables de $A$ es cerrado, es decir, si $a, b$ son cancelables en $A$, entonces $a * b$ es cancelable en $A$.

Hipótesis $(A, *)$

$a$ Es cancelable $\wedge$ $b$ es cancelable, existen pq $A \neq 0$

Conjunto de los cancelables

1) Caracterizar el conjunto de los cancelables

Sea $x, y \in A$, $a$ cancelable

$$\underbrace{\begin{matrix} x * a = y * a \Rightarrow x = y \\ x * b = y * b \Rightarrow x = y \end{matrix}}_{} \Rightarrow \underbrace{\underset{p}{(a*b)*x = (a*b)*y} \Rightarrow \underset{\Rightarrow q}{x = y}}_{}$$

además $c \in C = \{a, b\}$

Análogo $c * x = c * y \Rightarrow x = y$

2) $(a*b)*x = (a*b)*y$

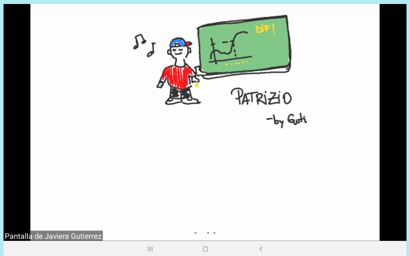
$\Leftrightarrow a*(b*x) = a*(b*y)$ / Por enunciado $a$ cancelable

$\Rightarrow (b*x) = (b*y)$ / $b$ cancelable

$\Rightarrow x = y$

$x*(a*b) = y*(a*b)$

Luego se Argumenta análogo




**P2.** ***Engrupiendo***

Considere la siguiente operación en $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z)\Delta(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+x\cdot y')$$

*a*) Probar que $(\mathbb{R}^3,\Delta)$ es grupo.

*b*) Probar que:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \forall (a,b,c,)\in\mathbb{R}^3, (x,y,z)\Delta(a,b,c) = (a,b,c)\Delta(x,y,z)\} = \{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$$

¿Es $(\mathbb{R}^3,\Delta)$ abeliano?.

*c*) Considere $G=\{(0,y;z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}$, muestre que $\Delta$ es l.c.i. en $G$. De ahora en adelante asumiremos que $(G,\Delta)$ es grupo (es demostrable, pero no se pide hacerlo). Pruebe que es abeliano.

*d*) Probar que $(G,\Delta)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$, donde la suma en el plano real $\mathbb{R}^2$ es coordenada a coordenada.

- **[Grupo]**: Sea $(G,*)$ una e.a., diremos que:
  - Es **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro y todo elemento posee inverso.
  - Es **grupo abeliano** si es grupo y $*$ es conmutativa.

$(x,y,z)\Delta(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+xy')$

i) lci $(x,y,z)\Delta(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+xy')$

$\vec{a}\in\mathbb{R}^3$

$\to$ $x+x'\in\mathbb{R}$, si $x,x'\in\mathbb{R}$

$y+y'\in\mathbb{R}$, si $y,y'\in\mathbb{R}$

$z+z'+x\cdot y'\in\mathbb{R}$, si $x,y',z,z'\in\mathbb{R}$

luego es lci

ii) neutro sea $x,y,z\in\mathbb{R}$, $e_1,e_2,e_3\in\mathbb{R}$

lo que quiero $\vec{a}_{(x,y,z)} * \vec{a}_{(e_1,e_2,e_3)} = \vec{a}_{(x,y,z)}$

$(x,y,z)\Delta(e_1,e_2,e_3) = (x,y,z)$

$\Leftrightarrow (x+e_1, y+e_2, z+e_3+xe_2) = (x,y,z)$

$\Leftrightarrow x+e_1=x \wedge y+e_2=y \wedge z+e_3+x\cdot e_2 = z$

$e_1=0 \wedge e_2=0 \wedge e_3=0$

luego candidato a neutro es $\vec{e}:=(0,0,0)$

$(0,0,0)\Delta(x,y,z) = (0+x, 0+y, 0+z+0\cdot y)$
$= (x,y,z)$

$\therefore (0,0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ✓

iii) inverso!!

No entregar

$(x,y,z)\Delta(\bar x,\bar y,\bar z)=(0,0,0)$

$(x+\bar x, y+\bar y, z+\bar z+x\bar y) = (0,0,0)$

$\bar x=-x \wedge \bar y=-y \wedge \bar z = -z - x\bar y$

Candidato

$(-x,-y,-z-x\bar y) = (-x,-y,-z+xy)$

En efecto sea $\vec{a}^{-1}_{(x,y,z)} = (-x,-y,-z+xy)\in\mathbb{R}^3$

Candidato

Veamos

$(x,y,z)\Delta(-x,-y,-z+xy) = (0,0,0)$

$(-x,-y,-z+xy)\Delta(x,y,z) = (0,0,0)$

$(x+-x, y+(-y), z+(-z)+xy+x(-y))$

$=(0,0,0)$

Luego es análogo por derecha

$\therefore (-x,-y,-z+xy)$ es inverso $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

iv) sea $\underbrace{x,y,z}_{\vec a_1}, \underbrace{\bar x,\bar y,\bar z}_{\vec a_2}, \underbrace{x',y',z'}_{\vec a_3}\in\mathbb{R}$

PDQ: $\vec a_1\Delta(\vec a_2\Delta\vec a_3) = (\vec a_1\Delta\vec a_2)\Delta\vec a_3$ [Insertar MATRACA] $\Rightarrow$ Es grupo

. ***Engrupiendo***

Considere la siguiente operación en $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z)\Delta(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + x \cdot y')$$

*a*) Probar que $(\mathbb{R}^3, \Delta)$ es grupo.

*b*) Probar que:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (a, b, c, ) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z)\Delta(a, b, c) = (a, b, c)\Delta(x, y, z)\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

¿Es $(\mathbb{R}^3, \Delta)$ abeliano?.

*c*) Considere $G = \{(0, y; z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$, muestre que $\Delta$ es l.c.i. en $G$. De ahora en adelante asumiremos que $(G, \Delta)$ es grupo (es demostrable, pero no se pide hacerlo). Pruebe que es abeliano.

*d*) Probar que $(G, \Delta)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$, donde la suma en el plano real $\mathbb{R}^2$ es coordenada a coordenada.

c) $G = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$, $\Delta$ l.c.i. en $G$

Sea $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in G$, $x', y', z' \in G$

$\Rightarrow \bar{x} = 0$, $x' = 0$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\Delta(x', y', z')$

$= (0, \bar{y}, \bar{z})\Delta(0, y', z')$

$= (0+0, \bar{y}+y', \bar{z}+z'+0\cdot y')$

$= (\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{\bar{y}+y'}, \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{\bar{z}+z'}) \in G$

$(0, \bar{y}, \bar{z})$ son arbitrarios

$(0, y', z')$

$(0, y', z')\Delta(0, \bar{y}, \bar{z}) \in G$

Asumo que es grupo y pruebo grupo abeliano

Sea $(0, \bar{y}, \bar{z}), (0, y', z') \in G$

PDQ $(0, \bar{y}, \bar{z})\Delta(0, y', z') = (0, y', z')\Delta(0, \bar{y}, \bar{z})$

$(0, \bar{y}, \bar{z})\Delta(0, y', z') = (0, \bar{y}+y', \bar{z}+z' \underset{+0\cdot y'}{}) = (0, y'+\bar{y}, z'+\bar{z} \underset{+0\cdot\bar{y}}{}) = (0, y', z')\Delta(0, \bar{y}, \bar{z})$

$\therefore$ Conmuta

**2. *Engrupiendo***

Considere la siguiente operación en $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z)\Delta(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + x \cdot y')$$

*a*) Probar que $(\mathbb{R}^3, \Delta)$ es grupo.

*b*) Probar que:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (a, b, c, ) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z)\Delta(a, b, c) = (a, b, c)\Delta(x, y, z)\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

¿Es $(\mathbb{R}^3, \Delta)$ abeliano?.

*c*) Considere $G = \{(0, y; z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$, muestre que $\Delta$ es l.c.i. en $G$. De ahora en adelante asumiremos que $(G, \Delta)$ es grupo (es demostrable, pero no se pide hacerlo). Pruebe que es abeliano.

*d*) Probar que $(G, \Delta)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$, donde la suma en el plano real $\mathbb{R}^2$ es coordenada a coordenada.

¿Qué es ser isomorfo? → morfismo Biyectivo

$(G, \Delta)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$

$f : (G, \Delta) \to (\mathbb{R}^2, +)$

(1) $f((0, y, z)\Delta(0, b, c)) = f(0, y, z) + f(0, b, c)$

(2) $(0, b, c) \to f(0, b, c) = (b, c)$, spg $b, c \in \mathbb{R}$

(1) $f((0, y, z)\Delta(0, b, c)) = f(0+0, y+b, z+c+0\cdot b)$
$= f(0, y+b, z+c)$
$= (y+b, z+c)$
$= (y, z) + (b, c)$
$= f(0, y, z) + f(0, b, c)$

inyectiva $f(\vec{a}) = f(\vec{b}) \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

$\vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow f(\vec{a}) \neq f(\vec{b})$

$f(\vec{a}) = f(\vec{b})$, $\vec{a} = (0, y, z)$, $z, y \in \mathbb{R}$

se cumple $\vec{b} = (0, b, c)$, $b, c \in \mathbb{R}$

$f(\vec{a}) = f(0, y, z) = (y, z)$

$f(\vec{b}) = f(0, b, c) = (b, c)$

Sea $y, z \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{formal}}$

luego $(y, z)$
$= f(0, y, z)$ $\vec{a}$ def
$= f(\vec{a})$ Hipótesis
$= f(\vec{b})$ $\vec{b}$ vector
$= f(0, b, c)$
$= (b, c) \Rightarrow y = b \wedge z = c$ $\therefore f$ inyectiva

Epiyectividad $g : B \to C$

$\forall y \in C, \exists x \in B$ tq $f(x) = y$

$\forall (b, c) \in \mathbb{R}^2$, $\exists (0, y, z) \in G$, tq $f(0, y, z) = (b, c)$, $0 \in \mathbb{R}$, $y, z \in \mathbb{R}$

Basta tomar $(0, b, c) \in G$

$0, b, c \in \mathbb{R}$

tomando $f(0, b, c) = (b, c) \in \mathbb{R}^2$

como son arbitrarios se prueba sobreyectiva

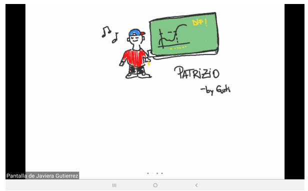
**P4. *Anillos*** GA $\to$ GA

Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y $(A,\oplus,\odot)$ un anillo. Sea $f: K \to A$ morfismo entre $(K,+,\cdot)$ y $(A,\oplus,\odot)$ con $1_A \neq 0_A$. Demuestre que:

a)
- $f(0_K) = 0_A$
- $\forall x \in K,\ f(-x) = -f(x)$
- $(f(K),\oplus)$ es un subgrupo de $(A,\oplus)$

b) $f(x) = 0_A \Leftrightarrow x = 0_K$

c) $f$ inyectiva.




$f: K \to A$

a) $f(0_K) = 0_A$

$f(0_K) = f(0_K + 0_K)$ } En virtud de $(A,\oplus)$ Grupo abeliano

$\Leftrightarrow f(0_K) = f(0_K) \oplus f(0_K)$

$\Leftrightarrow f(0_K) \ominus f(0_K) = f(0_K) \oplus \underbrace{f(0_K) \ominus f(0_K)}_{\text{inverso aditivo } \oplus}$ ) soy cancelable

$\Leftrightarrow 0_A = f(0_K)$ //

$= f(0_K) \oplus 0_A = f(0_K)$

b) $\forall x \in K, f(-x) = -f(x)$

Sea $x \in K$ arbitrario, $(K,+)$ es grupo abeliano

por parte anterior

$\underbrace{0_A}_{\text{Parte anterior}} = f(0_K) = \underbrace{f(x+(-x))}_{\text{Inverso}} = \underbrace{f(x) \oplus f(-x)}_{\text{morfismo}}$

$(A,\oplus,\odot)$ Anillo

$\Rightarrow (A,\oplus)$ grupo abelito

$\Leftrightarrow 0_A = f(x) \oplus f(-x) \,/ \oplus -f(x)$

$\Leftrightarrow 0_A \oplus -f(x) = f(x) \oplus f(-x) \oplus -f(x)$

$\Leftrightarrow -f(x) = f(-x),\ \forall x \in K.$

sea $(f(K),\oplus)$ ver subgrupo $(A,\oplus)$

sea $x, y \in f(K)$

si pruebo $x \oplus y^{-1} \in f(K)$ es subgrupo

Como $f: K \to A$ es morfismo entre $(K,+,\cdot)$ y $(A,\oplus,\odot)$ en particular es morfismo $(K,+)$ y $(A,\oplus)$

Luego $(K,+)$ es subgrupo de sí mismo $\Rightarrow$ H subgrupo de G si: $H \subseteq G$, H cumple propiedades de grupo | $G \subseteq G \to$ grupo abeliano

luego $(f(K),\oplus)$ es subgrupo de $(A,\oplus)$

**P1.** Sean $(A,*_A)$, $(B,*_B)$ grupos y $f: A \to B$ morfismo.

a) Demuestre que si $(C,*_A)$ es subgrupo entonces $(f(C),*_B)$ también lo es.

$(K,+)$ subgrupo $\Rightarrow$ $(f(K),+)$ subgrupo Dem:

**P1.** Sean $(A,*_A)$, $(B,*_B)$ grupos y $f: A \to B$ morfismo. = homomorfismo

a) Demuestre que si $(C,*_A)$ es subgrupo entonces $(f(C),*_B)$ también lo es.

b) Demuestre que si $(D,*_B)$ es subgrupo entonces $(f^{-1}(D),*_A)$ también lo es.

- **[Subgrupo]**: Sea $(G,*)$ grupo y $\emptyset \neq H \subseteq G$. Diremos que $H$ es subgrupo de $G$ si $(H,*)$ es grupo.
- **[Propiedades subgrupos]**:
  1. Si $e \in G$ es el neutro de $G$ y $e_H \in H$ es neutro de $H$ entonces $e = e_H$.
  2. Además, sea $x \in H$. $x^{-1} \in G$ es el inverso de $x$ en $(G,*)$, y $\overline{x}$ es el inverso de $x$ en $(H,*)$. Entonces $x^{-1} = \overline{x}$.
- **[Caracterización Subgrupos]**: Sea $H \neq \emptyset$. Entonces:

  $(H,*)$ es subgrupo de $(G,*)$ $\Leftrightarrow \forall x,y \in H,\ x*y^{-1} \in H$

$f^{-1} = g$

$f: A \to B$

$g: f(A) \to A$

$x *_B y^{-1} \in f(C)$ yo quiero

Sea spg $x, y \in f(C)$

si $x \in f(C)$, $\exists a \in C$, tq $x = f(a)$

si $y \in f(C)$, $\exists b \in C$, tq $y = f(b)$

$x *_B y^{-1}$ → arbitrarios

$= f(a) *_B (f(b))^{-1}$

$= f(a) *_B f(b^{-1})$

$= \underbrace{f(a *_A b^{-1})}_{\in C} \in f(C)$ } f morfismo

$\Leftrightarrow b *_A b^{-1} = e_A \,/ f$

$\Leftrightarrow f(b *_A b^{-1}) = f(e_A)$

$\Leftrightarrow f(b) *_B f(b^{-1}) = e_B \,/ *_B f^{-1}(b)$ (por la izq)

$\Leftrightarrow f^{-1}(b) *_B f(b) *_B f(b^{-1}) = f^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow e_B *_B f(b^{-1}) = f^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow f(b^{-1}) = f^{-1}(b)$

Por enunciado $(A,*_A)$ grupo $\Rightarrow *_A$ cerrado (=l.c.i)

$\Leftrightarrow x *_B y^{-1} \in f(C)$

**P4.** ***Anillos***

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(A, \oplus, \odot)$ un anillo. Sea $f : K \to A$ morfismo entre $(K, +, \cdot)$ y $(A, \oplus, \odot)$ con $1_A \neq 0_A$. Demuestre que:

*a)*
- $f(0_K) = 0_A$
- $\forall x \in K,\ f(-x) = -f(x)$
- $(f(K), \oplus)$ es un subgrupo de $(A, \oplus)$

*b)* $f(x) = 0_A \Leftrightarrow x = 0_K$

*c)* $f$ inyectiva.

b) $\Leftarrow)$ $x = 0_K$ por parte a) $f(0_K) = 0_A$

$\Rightarrow)$ $f(x) = 0_A \Rightarrow x = 0_K$

$p \Rightarrow q$

$p \wedge \sim q$

Contradiccion

$\Leftrightarrow x \neq 0_K \wedge \underline{f(x) = 0_A}$, $x$ invertible

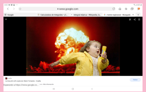
Sabemos $f(1_K) = f(x \cdot x^{-1})$ como $x \neq 0_K$

$f(1_K) = f(x) \odot f(x^{-1})$

$f(1_K) = 0_A \odot f(x^{-1})$, $0_A$ es absorbente $\odot$

$f(1_K) = 0_A$

$f(1_K) = 1_A$



$\therefore x \neq 0_K \Leftrightarrow F$

$\Rightarrow x = 0_K$

---

$f(x) = f(y)$ (1) Parte a)

$f(x-y) = f(x) \oplus f(-y)$ (2)

} Idea

c) En efecto: Sean $x, y \in K$ arbitrarios tal que $f(x) = f(y)$

Basta ver $f(x-y) = f(x) \oplus f(-y)$ / $f$ morfismo

$= f(x) \oplus -f(y)$ / Parte a

$= 0_A$ / Hipótesis $f(x) = f(y)$

Así $f(x-y) = 0_A$

por parte b) $\Rightarrow x - y = 0_K$ / $(-y)$ es inverso c/R a $+$ de $x$, así

$\Rightarrow x = -(-y)$

$x = y$ / pues $(K, +)$ es grupo abeliano, luego $-(-y)$

$\therefore \forall x, y \in K,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

luego $f$ inyectiva.