MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 12: Anillos-Cuerpos-Divisores de 0

fecha 24/07

Resumen

- **[Subgrupo]**: Sea $(G, *)$ grupo y $\emptyset \neq H \subseteq G$. Diremos que H es subgrupo de G si $(H, *)$ es grupo.
- **[Propiedades subgrupos]**:
  1. Si $e \in G$ es el neutro de G y $e_H \in H$ es neutro de H entonces $e = e_H$.
  2. Además, sea $x \in H$. $x^{-1} \in G$ es el inverso de x en $(G, *)$, y $\overline{x}$ es el inverso de x en $(H, *)$. Entonces $x^{-1} = \overline{x}$.
- **[Caracterización Subgrupos]**: Sea $H \neq \emptyset$. Entonces:

  $(H, *)$ es subgrupo de $(G, *) \Leftrightarrow \forall x, y \in H,\ x{*}y^{-1} \in H$
- **[Subgrupo imagen]**: Sea $(G, *)$ grupo, (K, Δ) una estructura algebraica y $f : G \longrightarrow K$ un morfismo. Si H es subgrupo de $(G, *)$, entonces $f(H)$ es subgrupo de $(f(G), \Delta)$.
- **[Lagrange]**: Si $(H, *)$ es subgrupo del grupo finito $(G, *)$, entonces $|H|$ divide a $|G|$.
- **[Anillo]**: Una e.a. $(A, +, \cdot)$ se llamará anillo si:
  - $(A, +)$ es grupo abeliano.
  - $\cdot$ es asociativa y posee elemento neutro en $A \setminus \{0\}$.
  - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.

  En el caso de ser $\cdot$ conmutativo, $(A, +, \cdot)$ será anillo conmutativo.
- **[Morfismos de anillos]**: $f : A \to B$ Sera morfismo entre dos anillos $(A, +, \cdot)$ y $(B, +, \cdot)$ si:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$f(1) = 1$$

- **[Algebra en anillos]**: Si $(A, +, \cdot)$ es anillo y $x, y \in A$:
  - $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
  - $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
  - $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
  - $-x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$
- **[Divisores de cero y dominio de integridad]**: Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un elemento $a \neq 0$ es divisor de 0 si $\exists y \neq 0$ tal que $a \cdot y = 0$ o $y \cdot a = 0$.
  A un anillo conmutativo y sin divisores de 0 lo llamaremos dominio de integridad.
- **[Propiedad]**: Si $(A, +, \cdot)$ anillo, entonces:

  a es cancelable en $(A, \cdot) \Leftrightarrow a$ no es divisor de cero
- **[Cuerpo]**: Una estructura $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se llamará cuerpo si:
  - $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo.
  - Todo elementos en $K \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

  Equivalentemente $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ sera cuerpo si y solo si:
  - $(\mathbb{K}, +)$ es grupo abeliano.
  - $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano.
  - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- **[Caracterización cuerpos finitos]**: Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo, entonces $\mathbb{K}$ no tiene divisores de 0 ($\mathbb{K}$ es dominio de integridad).
  El reciproco se tiene si $|\mathbb{K}|$ es finito, es decir:
  Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es dominio de integridad con $|\mathbb{K}|$ finito, entonces $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo.

"Mañana se triunfa equipo"
Pato

P1. Sean $(A, *_A)$, $(B, *_B)$ grupos y $f : A \to B$ morfismo.

a) Demuestre que si $(C, *_A)$ es subgrupo entonces $(f(C), *_B)$ también lo es.

b) Demuestre que si $(D, *_B)$ es subgrupo entonces $(f^{-1}(D), *_A)$ también lo es.

P2. $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Probar que el conjunto

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$.

P3. Sea $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ y } ab - cd = 1\}$. Demuestre que $(X, \circ)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \circ)$.

P4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor del 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$,entonces $a \cdot b$ es divisor del 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor del 0, entonces al menos uno de ellos es divisor del 0.

P5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por

$$G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$

(I) Mostrar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.

(II) Sea $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Pruebe que H es subgrupo de G.

(III) Si $A = \mathbb{Z}_8$, encuentre G y H.

P6. ***Subgrupos y Lagrange***
Sea $(G, *)$ un grupo abeliano, y sean P y Q dos subgrupos de G. Se define

$$P * Q = \{z \in G \mid \exists (p, q) \in P \times Q \text{ tal que } z = p * q\}$$

a) Pruebe que $P \subseteq P * Q$ y $Q \subseteq P * Q$.

b) Pruebe que $P * Q$ es subgrupo de G.

c) Suponga que $|G| = 36$, $|P| = 12$ y $|Q| = 18$. Concluya que $P * Q = G$

P7. ***Anillos***
Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(A, \oplus, \odot)$ un anillo. Sea $f : K \to A$ morfismo entre $(K, +, \cdot)$ y $(A, \oplus, \odot)$ con $1_A \neq 0_A$. Demuestre que:

a)
- $f(0_K) = 0_A$
- $\forall x \in K,\ f(-x) = -f(x)$
- $(f(K), \oplus)$ es un subgrupo de $(A, \oplus)$

b) $f(x) = 0_A \Leftrightarrow x = 0_K$

c) f inyectiva.

Resumen

- [**Homomorfismos**]: Una función $f : A \to B$ es un **morfismo** entre las estructuras algebraicas $(A, *)$ y (B, Δ) si:

  $$\forall x, y \in A,\ f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$$

  Si f es biyectiva se dirá **isomorfismo**.

- [**Props epimorfismos**]: Si $f : A \to B$ epimorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ), entonces se tienen las siguientes propiedades:

  I) Si $(A, *)$ es asociativa, entonces (B, Δ) tambien lo es.

  II) Si $(A, *)$ es conmutativa, entonces (B, Δ) tambien lo es.

  III) Si e es neutro para $(A, *)$, entonces $f(e)$ lo es para (B, Δ).

  IV) Si a tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ).

- [**Props. más generales**]: Sea f un morfismo de $(A, *)$ a (B, Δ), con neutros e_A y e_B:

  I) Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$.

  II) Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$.

- [**Composición**]: Si $f : A \to B$ un homeomorfismo de $(A, *)$ en (B, Δ) y $g : B \to C$ un homemorfismo de (B, Δ) en $(C, \bullet)$, entonces la composición de f con g, $g \circ f : A \to C$, es un morfismo de $(A, *)$ en $(C, \bullet)$.

- [**Estructuras isomorfas**]: Dos estructuras $(A, *)$ y (B, Δ) son isomorfas, denotado $(A, *) \cong (B, \Delta)$, si existe una función $f : A \to B$ isomorfismo.
  Obs.: $\cong$ es una relación de equivalencia.

- [**Isomorfismo inverso**]: Si $f : A \to B$ es un isomorfimos entre $(A, *)$ y (B, Δ), entonces $f^{-1} : B \to A$ es un isomorfismo entre (B, Δ) y $(A, *)$.

- [**Estructura de funciones**]: Sea $(B, *)$ una e.a., entonces $(B^A, *)$ sera una e.a., donde si $f, g \in B^A$ definimos $f * g : A \to B$ por:

  $$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

- [**Propiedades varias**]:

  I) Si $(B, *)$ es asociativa, entonces $(B^A, *)$ también.

  II) Si $(B, *)$ es conmutativa, entonces $(B^A, *)$ también.

  III) Si $(B, *)$ tiene neutro e, entonces $f \in (B^A, *)$ dado por $f(x) = e$ (función constante) es neutro de $(B^A, *)$

- [**Estructura de pares ordenados**]: Sean $(A_1, *_1)$ y $(A_1, *_1)$ e.a., se define la l.c.i. $\otimes$ sobre $A_1 \times A_2$ por: Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$:

  $$(a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$$

- [**Propiedades varias**]:

  I) Si $(A_1, *_1)$,$(A_2, *_2)$ son asociativas, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ también.

  II) Si $(A_1, *_1)$,$(A_2, *_2)$ son conmutativas, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ también.

  III) Si $(A_1, *_1)$,$(A_2, *_2)$ poseen neutros e_1 y e_2, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ posee neutro (e_1, e_2)

  IV) Si a_1, a_2 poseen inversos b_1, b_2 en $(A_1, *_1)$,$(A_2, *_2)$, entonces (a_1, a_2) posee inverso (b_1, b_2) en $(A_1 \times A_2, \otimes)$.

- [**Grupo**]: Sea $(G, *)$ una e.a., diremos que:

  - Es **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro y todo elemento posee inverso.
  - Es **grupo abeliano** si es grupo y $*$ es conmutativa.

- [**Propiedades grupos**]: Sea $(G, *)$ grupo, entonces:

  I) $\forall a, b \in G, a * x_1 = b \Leftrightarrow x_1 = a^{-1} * b$
  $\forall a, b \in G, x_2 * a = b \Leftrightarrow x_1 = b * a^{-1}$
  Es decir, las ecuaciones tienen una única solución.

  II) $\forall a \in G$ las funciones $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ son biyectivas.

  III) El unico elemento idempotente es el neutro.

  IV) Si (K, Δ) una e.a. y $f : G \to K$ morfismo, entonces $(f(G), \Delta)$ es grupo.

  V) Si (K, Δ) una e.a., un morfismo $f : G \to K$ es monomorfismo (inyectivo) si y solo si $f^{-1}(\{e_K\}) = \{e_G\}$

- [**Grupos importantes**]:

  - Si $(G, *)$ es grupo (abeliano) y $A \neq \emptyset$, entonces $(G^A, *)$ es grupo (abeliano)
  - Si $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ son grupos (abelianos), entonces $(G_1 \times G_2, \otimes)$ es grupo (abeliano).