MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Resumen

- **[Ley de composición interna]**: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \to & A \\ & (x,y) & \to & x * y \end{array}$$

- **[Estructura algebrica]**: Si $*$ es l.c.i. en A, $(A,*)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A,*,\Delta)$
- **[Definiciones varias]**: Sea $(A,*)$ estructura algebrica:

  I) $*$ es **asociativa** si:
  $$\forall x,y,z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$$
  II) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:
  $$\forall x \in A, e*x = x*e = x$$
  III) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:
  $$x*y = y*x = e$$
  IV) $*$ es **conmutativa** si:
  $$\forall x,y \in A, x*y = y*x$$
  V) $a \in A$ es **absorbente** si:
  $$\forall x \in A, x*a = a*x = a$$
  VI) $a \in A$ es **idempotente** si
  $$a*a = a$$
  VII) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y,z \in A$:
  $$\begin{aligned} a*y = a*z &\Rightarrow y = z \\ y*a = z*a &\Rightarrow y = z \end{aligned}$$
  VIII) Dado $(A,*,\Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x,y,z \in A$:
  $$\begin{aligned} x\Delta(y*z) &= (x\Delta y)*(x\Delta z) \\ (y*z)\Delta x &= (y\Delta x)*(z\Delta x) \end{aligned}$$

- **[Cancelavilidad]**: Sea $(A,*)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ para $x \in A$ son inyectivas
- **[Unicidad del neutro]**: Una e.a. $(A,*)$ posee a lo más un neutro.
- **[Unicidad del inverso]**: Si la e.a. $(A,*)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.
- **[Propiedades varias]**: Si $(A,*)$ es e.a. asociativa con neutro e, entonces también cumple:

  I) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.
  II) Si $x,y \in A$ poseen inversos, entonces $x*y$ también y se tiene $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$
  III) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

Para los ejercicios de estructuras algebraicas es necesario conocer cada una de las definiciones correspondientes, en este caso lo que sería ser asociativo ,ser conmutativo ,poseer elemento neutro y poseer inverso para la operación.
También es importante considerar la unicidad de estos dos últimos dado que esto nos proporcionará una serie de resultados que nos serán muy útiles en el estudio de las estructuras.

la intuición nos debe decir que nos definen cierta operación y verificaremos s cumplen las propiedades de asociatividad ,elemento neutro y existencia de inversa donde cada una de estas se caracteriza, de forma particular. La asociatividad tomamos tres elementos arbitrarios en el conjunto y los trabajamos. El elemento neutro debe verificar que al operarlo con un elemento cualquiera del conjunto me entregue el mismo elemento y el elemento inverso será el cual yo operé con un elemento del conjunto y me entregué el elemento neutro en caso de existir nos respalda la teoría de estructuras algebraicas y la matraca será ver las ecuaciones

P1. Sea $(S,*)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación $\triangle$ en S como sigue:

$$\forall x,y \in S, \quad x \triangle y = x*a*y.$$

I Demuestre que la ley $\triangle$ es asociativa, tiene neutro y encuéntrelo.
II Caracterice los elementos invertibles para $\triangle$ y calcule el inverso de a para $\triangle$.

a) Intuición:
b) Teoría:
c) Matraca:

Comprobamos que funciona nuestro candidato por derecha y por izquierda, dado que no sabemos si necesariamente es conmutativa la operación, además de esto utilizamos que la operación * era de antemano asociativa, con elemento neutro e.

I) PDQ: Asociativa.

Sea $x,y,z \in S$ tq (lo que quiero $(x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$)

$$\begin{aligned}
&(x\Delta y)\Delta z \\
&= (x*a*y)\Delta z \quad \text{def } \Delta \\
&= (x*a*y)*a*z \quad \text{Sabemos que } * \text{ es Asociativa.} \\
&= x*a*(y*a*z) \quad \text{def } \Delta \\
&= x*a*(y\Delta z) \underset{\text{def } \Delta}{=} x\Delta(y\Delta z)
\end{aligned}$$

$\therefore$ Es Asociativa Δ

Elemento neutro:

$x\Delta\underset{\text{Candidato}}{\hat{e}} = x*a*\hat{e} = $ (x lo que quiero) Propongo $\hat{e} = a^{-1}$ como candidato, además a^{-1} existe por enunciado., Verifiquemos 1) $x\Delta\hat{e} = x$ ^ 2) $\hat{e}\Delta x = x$ (pues a priori no es conmutativa).

1) $x\Delta\hat{e} = x\Delta a^{-1}$
$= x*a*a^{-1}$
$= x*(a*a^{-1})$
$= x*e$
$= x$ //

2) $\hat{e}\Delta x = a^{-1}\Delta x$
$= a^{-1}*a*x$
$= (a^{-1}*a)*x$
$= e*x$
$= x$ //

II) elemento invertible para Δ

Sea $x,y \in S$ y $a, a^{-1} \in S$

la ecuación planteada es

$x \Delta z = a^{-1}$

notemos que el elemento Z ,el Cuál será nuestro candidato a inverso de x nos debe entregar el neutro para la operación ya calculado antes.En su defecto Z dependerá de X porque el inverso para la operación debe ser único para cada elemento de S.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \Delta z = a^{-1} \\
&\Leftrightarrow x * a * z = a^{-1} \quad / * x^{-1} \\
&\Leftrightarrow x^{-1} * (x * a * z) = x^{-1} * a^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x^{-1} * x) * a * z = x^{-1} * a^{-1} \\
&\Leftrightarrow e * a * z = x^{-1} * a^{-1} \\
&\Leftrightarrow a * z = x^{-1} * a^{-1} \quad / * a^{-1} \\
&\Leftrightarrow a^{-1} * (a * z) = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1} \\
&\Leftrightarrow (a^{-1} * a) * z = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1} \\
&\Leftrightarrow e * z = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1} \\
&\Leftrightarrow z = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}
\end{aligned}
$$

Luego este será nuestro candidato $z = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}$, donde debemos asumir que x^{-1} existe, y z depende de x, es decir $z(x)$, Verifiquemos $x \Delta z = a^{-1} = \hat{e} = z \Delta x$

En su defecto $z \Delta x = (a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}) * a * x = a^{-1} * x^{-1} * (a^{-1} * a) * x = a^{-1} * x^{-1} * e * x = a^{-1} * x^{-1} * x$ $= a^{-1} * e = a^{-1}$ // luego cumple por izquierda.

$x \Delta z = x * a * z = x * a * (a^{-1} * x^{-1} * a) = x * (a * a^{-1}) * x^{-1} * a^{-1} = x * e * x^{-1} * a^{-1} = (x * x^{-1}) * a^{-1} = e * a^{-1} = a^{-1}$ //

luego verificamos por derecha

luego $z = a^{-1} * x^{-1} * a^{-1} = z(x)$ el candidato es el inverso para Δ.

Luego $\forall x \in S$, existe inverso para Δ, si solo si, $\exists x^{-1}$ inverso de x para $*$, inverso de a para Δ es $a^{-1} * x^{-1} * a^{-1}$.

P2. a) Sea $S = \{a, b, c\}$ (donde a, b y c son todos distintos) y $*$ la ley de composición interna dada por la siguiente tabla,

$*$	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Determine si $*$ es asociativa en S. Identifique el elemento neutro de S, encuentre los inversos para $*$ y determine si son únicos.

Notemos que nos entregan un conjunto con 3 elementos y además una ley de composición interna, lo que significa que al menos tenemos cerradura para la operación. Lo cual se describe en la tabla entregada. Veamos que por columna se nos entrega un resultado al operarlo con cierto elemento , como son 3 elementos podemos operarlo con otros 3 por lo tanto tendremos 9 resultados los cuales pueden ser iguales o no lo importante es que permanezcan dentro del conjunto.

Neutro) veamos que por la columna de c ,es decir, la tercera nos deja invariante los elementos por lo que podemos concluir que se será elemento neutro!!

ie $\forall x \in S$, $x * c = x \wedge c * x = x$

Asoc) Es Asociativa? $\iff (x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z \in S$.

Contraejemplo! si: $x = a$, $y = b$, $z = b$ vemos 1) $(a*b)*b = c*b = b$

2) $a*(b*b) = a*b = c$ distintos! $\neg\neg$ no es Asociativa.

Inverso) Sabemos que c es neutro, luego veremos quien nos entrega c para concluir.

1) $a*a = c$ 3) $b*a = c$

2) $a*b = c$ 4) $c*c = c$

con lo que podemos ver que a es inverso de sí mismo pero a su vez b también es inverso de a por lo que en realidad ,a posee dos inverso lo cual es una contradicción porque el inverso debe ser único para cada elemento (los elementos de S son diferentes entre sí)

P3. a) Sea $\mathcal{G} = (-1,1) \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\star$ la ley de composición interna definida por

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab} \qquad \forall a,b \in \mathcal{G}.$$

Demuestre que $(\mathcal{G},\star)$ es un grupo abeliano.

$\forall a,b \in G$ $\; -1<a<1$
$\Leftrightarrow |a|<1$
$\Leftrightarrow 0 \leq |a| < 1 \; /|b|$
$\Leftrightarrow |b|0 \leq |b||a| < |b|1$
$\Rightarrow 0 \leq |ab| < |b| < 1$
$\Rightarrow 0 \leq |ab| < 1$

* Luego vemos $-1<ab<1 \; /+1 \Leftrightarrow 0<1+ab<2$ luego el denominador está bien definido, pues no se anula. $\Leftrightarrow -1<ab<1$ *

PDQ es grupo abeliano:

1) Asociativo
2) Neutro
3) Inverso.
4) Conmutativo.

4) Conmutativa: $\forall a,b \in G$ (arbitrarios)

$a*b = \dfrac{a+b}{1+ab} = \dfrac{b+a}{1+ba} = b*a$ $\therefore$ Conmutativa

1) Asociativa, sea $a,b,c \in G$

$a*b*c = \left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)*c = \dfrac{\left(\dfrac{a+b}{1+ab}+c\right)}{1+\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)\cdot c} = \dfrac{(a+b+c+abc)\cancel{(1+ab)}}{\cancel{(1+ab)}(1+ab+ac+bc)}$

$a*(b*c) = a*\left(\dfrac{b+c}{1+bc}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{b+c}{1+bc}+a\right)}{1+\left(\dfrac{b+c}{1+bc}\right)a} = \dfrac{(a+b+c+abc)\cancel{(1+bc)}}{\cancel{(1+bc)}(1+ab+ac+bc)}$

Luego por transitividad de la igualdad $(a*b)*c = a*(b*c)$ $\therefore$ Asociativa.

2) Neutro. $a*e = a$ con $a,e \in G$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+e}{1+ae} = a$

$\Leftrightarrow \cancel{a}+e = \cancel{a}+a^2e$

$\Leftrightarrow 0 = e(a^2-1)$

$\Leftrightarrow e=0 \vee a^2-1=0$
$a=\pm 1$ $\times$ Esto no pasa pues $G=(-1,1)$

Luego $e \equiv 0$

$a*0 = \dfrac{a+0}{1+a\cdot 0} = a$

$0*a = \dfrac{0+a}{1+0\cdot a} = a$ luego e es neutro.

3) Inverso: Buscamos b que cumpla $a*b=0$ ($\equiv e$ para $*$) $a,b \in G$

$a*b=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{1+ab} = 0$

$\Leftrightarrow a+b=0$

$\Leftrightarrow b=-a$ su inverso aditivo será el inverso de $*$. Además si $a \in G = (-1,1) \Leftrightarrow -1<a<1 \; /\cdot -1$
$\Rightarrow -a \in (-1,1) \Leftrightarrow -1<-a<1$ //

Luego por 1), 2), 3), 4) Es grupo abeliano //

donde en un comienzo verificamos la cerradura de la operación pues tiene que estar definida dentro del conjunto ,posterior a esto vemos cada una de las distintas propiedades. Por otra parte como heredamos las buenas propiedades de la suma y la multiplicación en Los Reales la intuición nos dirá qué conmutar , asociar , poseerá elemento neutro y elemento inverso posible de despejar a través de una ecuación.

1)asociatividad: tomamos tres elementos arbitrarios y los calculamos por separado luego verificamos que nos entregan el mismo valor por lo que por la transitividad de la relación del equivalencia de la igualdad se tiene lo pedido.

2) neutro: imponemos la ecuación de a *e = a de dónde podemos despejar, luego este será nuestro candidato a neutro para la operación * donde verificamos que se cumpla por ambos lados.

3) inverso: como ya tenemos un elemento neutro imponemos un elemento cualquiera operado con otro que nos dé el elemento neutro ya encontrado. Una vez con esta ecuación despejamos el elemento neutro que en este caso nos da el inverso aditivo del elemento original.

4)conmutatividad: tomamos dos elementos arbitrarios y verificamos que a * b = b * a en su defecto la suma conmuta y el producto igual lo que nos permite concluir

b) Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Muestre que la función $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y que también es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$, donde las operaciones $+$ y $\cdot$ denotan la suma y producto usuales en $\mathbb{R}$.

Isomorfismo = morfismo + biyectivo

- [**Homomorfismos**]: Una función $f : A \to B$ es un **morfismo** entre las estructuras algebraicas $(A, *)$ y (B, Δ) si:

$$\forall x, y \in A, \ f(x * y) = f(x)\Delta f(y)$$

Si f es biyectiva se dirá **isomorfismo**.

Recuerdo.

Morfismo: $f(x*y) = f\left(\sqrt[5]{x^5+y^5}\right) = \left(\sqrt[5]{x^5+y^5}\right)^5 = x^5 + y^5 = f(x) + f(y)$ $\therefore$ Morfismo.

Veamos biyección, por MA1001 es biyectiva $x^5 = f(x)$ entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$

$\therefore$ luego es isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$

Veamos en $(\mathbb{R}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, \cdot)$

a $x \cdot y$ le aplicamos $f \Rightarrow f(x \cdot y) = (x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5 = f(x) f(y)$

y sabemos que $f(x) = x^5$ es biyectiva.

$\therefore$ Isomorfismo

el ser un isomorfismo equivale a ser un morfismo biyectivo por lo que habrá que verificar estas condiciones el ser morfismo sólo es ver que a través de la función se separa en operaciones Por otra parte la biyectividad la probaremos como es de costumbre

P4. a) Demuestre que para cada $k \in \mathbb{Z}$, la función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(q) = kq$ es un automorfismo.(Grupo Aditivo y $k \neq 0$)

a) Automorfismo? Recuerdo Morfismo biyectivo de $Q \to Q$

f biyectiva $f(q) = f(\bar{q})$

$\Leftrightarrow kq = k\bar{q}$, $k \neq 0$

$\Leftrightarrow q = \bar{q}$, $\forall q, \bar{q} \in Q$ luego es inyectiva

Sobreyectiva . $\forall y \in Q$. $\exists x \in Q$ tq $f(x) = y$

veamos que $x = \frac{y}{k}$, pues $f\left(\frac{y}{k}\right) = \cancel{k} \cdot \frac{y}{\cancel{k}} = y$ luego $\forall y \in Q, \exists x \in Q$ tq $f(x) = y$

$\therefore$ Subreyectivo

Morfismo $f(x+y) = k(x+y) = kx + ky = f(x) + f(y)$ $\therefore$ automorfismo

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl