MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 11: Estructuras Algebraicas y Homeomorfismos

fecha

Resumen

- **[Ley de composición interna]**: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \to & A \\ & (x,y) & \to & x * y \end{array}$$

- **[Estructura algebrica]**: Si $*$ es l.c.i. en A, $(A,*)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A,*,\Delta)$
- **[Definiciones varias]**: Sea $(A,*)$ estructura algebrica:

  i) $*$ es **asociativa** si:
  $$\forall x,y,z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$$
  ii) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:
  $$\forall x \in A, e*x = x*e = x$$
  iii) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:
  $$x*y = y*x = e$$
  iv) $*$ es **conmutativa** si:
  $$\forall x,y \in A, x*y = y*x$$
  v) $a \in A$ es **absorbente** si:
  $$\forall x \in A, x*a = a*x = a$$
  vi) $a \in A$ es **idempotente** si
  $$a*a = a$$
  vii) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y,z \in A$:
  $$\begin{array}{c} a*y = a*z \Rightarrow y = z \\ y*a = z*a \Rightarrow y = z \end{array}$$
  viii) Dado $(A,*,\Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x,y,z \in A$:
  $$\begin{array}{c} x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z) \\ (y*z)\Delta x = (y\Delta x)*(z\Delta x) \end{array}$$

- **[Cancelavilidad]**: Sea $(A,*)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ para $x \in A$ son inyectivas
- **[Unicidad del neutro]**: Una e.a. $(A,*)$ posee a lo más un neutro.
- **[Unicidad del inverso]**: Si la e.a. $(A,*)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.
- **[Propiedades varias]**: Si $(A,*)$ es e.a. asociativa con neutro e, entonces también cumple:

  i) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.
  ii) Si $x,y \in A$ poseen inversos, entonces $x*y$ también y se tiene $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$
  iii) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

P1. Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y * asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para * y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación $\triangle$ en S como sigue:

$$\forall x, y \in S, \quad x \triangle y = x * a * y.$$

I Demuestre que la ley $\triangle$ es asociativa, tiene neutro y encuéntrelo.

II Caracterice los elementos invertibles para $\triangle$ y calcule el inverso de a para $\triangle$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. a) Sea $S = \{a, b, c\}$ (donde a, b y c son todos distintos) y $*$ la ley de composición interna dada por la siguiente tabla,

$*$	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Determine si $*$ es asociativa en S. Identifique el elemento neutro de S, encuentre los inversos para $*$ y determine si son únicos.

b) Considere la estructura algebraica $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

I) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.

II) ¿Es $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ un grupo?

III) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.

IV) ¿Es $(\mathbb{Z}_4, \setminus\{[0]\}, \cdot_4))$ un grupo?

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P3. a) Sea $\mathcal{G} = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\star$ la ley de composición interna definida por

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab} \qquad \forall a, b \in \mathcal{G}.$$

Demuestre que $(\mathcal{G}, \star)$ es un grupo abeliano.

b) Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Muestre que la función $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y que también es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$, donde las operaciones $+$ y $\cdot$ denotan la suma y producto usuales en $\mathbb{R}$.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P4. a) Demuestre que para cada $k \in \mathbb{Z}$, la función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(q) = kq$ es un automorfismo.(Grupo Aditivo y $k \neq 0$)

b) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ no son isomorfos.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P5. Sea $(G, *)$ un grupo.

I) Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano si y sólo si $\varphi : G \to G$ dada por $\varphi(g) = g * g$ es un homomorfismo.

II) Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano si y sólo si $\varphi : G \to G$ dada por $\varphi(g) = g^{-1}$ es un automorfismo.

P6. a) Sean G, H grupos, y $\varphi : G \to H$ un isomorfismo. Demuestre que G es abeliano si y sólo si H es abeliano. Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo, ¿qué condiciones suplementarias sobre φ (si es que las hay) son suficientes para asegurar que si G es abeliano entonces H también lo es?

b) Encuentre un ejemplo de grupos G, H y $\varphi : G \to H$ homomorfismo, de modo que G es abeliano y H no lo es.

Resumen

- [**Homomorfismos**]: Una función $f : A \to B$ es un **morfismo** entre las estructuras algebraicas $(A,*)$ y (B,Δ) si:

$$\forall x, y \in A,\ f(x*y) = f(x)\Delta f(y)$$

Si f es biyectiva se dirá **isomorfismo**.

- [**Props epimorfismos**]: Si $f : A \to B$ epimorfismo entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces se tienen las siguientes propiedades:

    I) Si $(A,*)$ es asociativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.

    II) Si $(A,*)$ es conmutativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.

    III) Si e es neutro para $(A,*)$, entonces $f(e)$ lo es para (B,Δ).

    IV) Si a tiene inverso b para $(A,*)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B,Δ).

- [**Props. más generales**]: Sea f un morfismo de $(A,*)$ a (B,Δ), con neutros e_A y e_B:

    I) Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$.

    II) Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$.

- [**Composición**]: Si $f : A \to B$ un homeomorfismo de $(A,*)$ en (B,Δ) y $g : B \to C$ un homemorfismo de (B,Δ) en $(C,\bullet)$, entonces la composición de f con g, $g \circ f : A \to C$, es un morfismo de $(A,*)$ en $(C,\bullet)$.

- [**Estructuras isomorfas**]: Dos estructuras $(A,*)$ y (B,Δ) son isomorfas, denotado $(A,*) \cong (B,\Delta)$, si existe una función $f : A \to B$ isomorfismo.
Obs.: $\cong$ es una relación de equivalencia.

- [**Isomorfismo inverso**]: Si $f : A \to B$ es un isomorfimos entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces $f^{-1} : B \to A$ es un isomorfismo entre (B,Δ) y $(A,*)$.

- [**Estructura de funciones**]: Sea $(B,*)$ una e.a., entonces $(B^A,*)$ sera una e.a., donde si $f,g \in B^A$ definimos $f*g : A \to B$ por:

$$(f*g)(x) = f(x)*g(x)$$

- [**Propiedades varias**]:

    I) Si $(B,*)$ es asociativa, entonces $(B^A,*)$ también.

    II) Si $(B,*)$ es conmutativa, entonces $(B^A,*)$ también.

    III) Si $(B,*)$ tiene neutro e, entonces $f \in (B^A,*)$ dado por $f(x) = e$ (función constante) es neutro de $(B^A,*)$

- [**Estructura de pares ordenados**]: Sean $(A_1,*_1)$ y $(A_1,*_1)$ e.a., se define la l.c.i. $\otimes$ sobre $A_1 \times A_2$ por: Para $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in A_1 \times A_2$:

$$(a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$$

- [**Propiedades varias**]:

    I) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ son asociativas, entonces $(A_1 \times A_2,\otimes)$ también.

    II) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ son conmutativas, entonces $(A_1 \times A_2,\otimes)$ también.

    III) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ poseen neutros e_1 y e_2, entonces $(A_1 \times A_2,\otimes)$ posee neutro (e_1,e_2)

    IV) Si a_1,a_2 poseen inversos b_1,b_2 en $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$, entonces (a_1,a_2) posee inverso (b_1,b_2) en $(A_1 \times A_2,\otimes)$.

- [**Grupo**]: Sea $(G,*)$ una e.a., diremos que:

    - Es **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro y todo elemento posee inverso.
    - Es **grupo abeliano** si es grupo y $*$ es conmutativa.

- [**Propiedades grupos**]: Sea $(G,*)$ grupo, entonces:

    I) $\forall a,b \in G, a*x_1 = b \Leftrightarrow x_1 = a^{-1}*b$
    $\forall a,b \in G, x_2*a = b \Leftrightarrow x_1 = b*a^{-1}$
    Es decir, las ecuaciones tienen una única solución.

    II) $\forall a \in G$ las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ son biyectivas.

    III) El unico elemento idempotente es el neutro.

    IV) Si (K,Δ) una e.a. y $f : G \to K$ morfismo, entonces $(f(G),\Delta)$ es grupo.

    V) Si (K,Δ) una e.a., un morfismo $f : G \to K$ es monomorfismo (inyectivo) si y solo si $f^{-1}(\{e_K\}) = \{e_G\}$

- [**Grupos importantes**]:

    - Si $(G,*)$ es grupo (abeliano) y $A \neq \emptyset$, entonces $(G^A,*)$ es grupo (abeliano)
    - Si $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2)$ son grupos (abelianos), entonces $(G_1 \times G_2,\otimes)$ es grupo (abeliano).

"Queda poquito para que acabe el semestre, ganitas a utds"
Pato