

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño

Profesora: Paulina Cecchi B.

Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 10: Al Infinito y más allá!

Estructuras algebraicas

26 de Junio

Resumen

- **[Producto numerable de finitos]**: El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos no es numerable.
- **[Cardinal del conjunto potencia]**: El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto, es decir: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- **[Cardinal Real]**: Se tiene que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]|$. Esto implica que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$
- **[Ley de composición interna]**: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$\begin{aligned} * : A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow x * y \end{aligned}$$

- **[Estructura algebraica]**: Si $*$ es l.c.i. en A , $(A, *)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A, *, \Delta)$
- **[Definiciones varias]**: Sea $(A, *)$ estructura algebraica:

I) $*$ es **asociativa** si:

$$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$

II) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:

$$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$

III) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:

$$x * y = y * x = e$$

IV) $*$ es **conmutativa** si:

$$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$

V) $a \in A$ es **absorbente** si:

$$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$

VI) $a \in A$ es **idempotente** si

$$a * a = a$$

VII) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y, z \in A$:

$$\begin{aligned} a * y = a * z &\Rightarrow y = z \\ y * a = z * a &\Rightarrow y = z \end{aligned}$$

VIII) Dado $(A, *, \Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x, y, z \in A$:

$$\begin{aligned} x \Delta (y * z) &= (x \Delta y) * (x \Delta z) \\ (y * z) \Delta x &= (y \Delta x) * (z \Delta x) \end{aligned}$$

- **[Cancelabilidad]**: Sea $(A, *)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ para $x \in A$ son inyectivas
- **[Unicidad del neutro]**: Una e.a. $(A, *)$ posee a lo más un neutro.
- **[Unicidad del inverso]**: Si la e.a. $(A, *)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.
- **[Propiedades varias]**: Si $(A, *)$ es e.a. asociativa con neutro e , entonces también cumple:
 - I) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.
 - II) Si $x, y \in A$ poseen inversos, entonces $x * y$ también y se tiene $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
 - III) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

P1. Sean A, B, C tres conjunto infinitos tales que:

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset \text{ y } |B| = |C|.$$

- (a) ¿Qué relación hay entre $|A \cup B|$ y $|A \cup C|$?
- (b) ¿Y qué se puede decir si $|B| \leq |C|$?
- (c) ¿Y si $A \cap B = \{x_0\}$?

En todos los casos, demuestra tus afirmaciones.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P2. a) Determine la cardinalidad del conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$.
 b) Demuestre que si X es infinito y $x \in X$ entonces $|X| = |X \setminus \{x\}|$.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A\}.$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

P4. Dado un conjunto no vacío A , sea $\mathcal{F} = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Se define la operación $*$ de la siguiente manera:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f * g = (f \circ g)^{-1}.$$

- (a) Pruebe que $*$ es una ley de composición interna.
- (b) Estudie la asociatividad de $*$.
- (c) Estudie la conmutatividad de $*$.
- (d) Encuentre el elemento neutro de $*$.
- (e) Estudie la existencia de elementos inversos en $\mathcal{F}$.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P5. Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación Δ en S como sigue:

$$x, y \in S, \quad x \Delta y = x * a * y.$$

- (a) Demuestre que la ley Δ es asociativa, tiene neutro y encuéntralo.
 - (b) Caracterice los elementos invertibles para Δ y calcule el inverso de a para Δ .
- a) Intuición:
 - b) Teoría:
 - c) Matraca:



“«El grado de civilización de una sociedad se mide por el trato a sus presos» ”
Dostoyevski