

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño

Profesora: Paulina Cecchi B.

Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón

Correo: pyanez@dim.uchile.cl

**Auxiliar 08: Sumatorias**

12 de Junio

P1. Calcule:

$$(a).- \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \left(k + \frac{2^j}{j}\right).$$

$$(b).- \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}$$

$$(c).- \sum_{k=1}^n (k^2 + 1)k!.$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Calcule:

$$(a).- \sum_{k=1+\sum_{i=1}^{n-1} i}^{\sum_{j=1}^n j} (2k-1)$$

$$(b).- \sum_{k=1}^n \frac{2k+3}{k(k+1)3^k}$$

$$(c).- \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 5k + 5}{(k+4)!}$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. Sumatorias varias

Calcule las siguientes sumatorias:

$$a) \sum_{j=3}^{n-1} (j+1)(j+2)$$

$$b) \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-3}$$

$$c) \sum_{k=l}^n \left(\frac{2}{l}\right)^k$$

$$d) \sum_{i=1}^n 2^{i+1} \frac{i}{(i+1)(i+2)}$$

$$e) \sum_{i=1}^n i2^i$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P4. Probar por inducción que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P5. Si $\sum_{i=1}^n u_i = 2n^2 + 3n$, calcule el valor de $\sum_{i=n+1}^{2n} u_i$ y de u_n .

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P6. Exprese como una sumatoria y calcule el valor de la suma de los n -primeros términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1 \cdot 2^1}{3!}, \quad \frac{2 \cdot 2^2}{4!}, \quad \frac{3 \cdot 2^3}{5!}, \quad \frac{4 \cdot 2^4}{6!}, \quad \dots$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P7. Exprese como una sumatoria y calcule el valor de la suma de los n -primeros términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \quad \dots$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P8. Hallar el número de esferas en un apilamiento sobre una base rectangular cuyos lados contienen 15 y 20 esferas, si el tope es una línea.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P9. Verifique que la sumatoria de los $i \in \mathbb{N}$ impares que son menores que $6n$ y que no son múltiplos de 3 es $6n^2$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P10. Para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sea $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

(a).- Para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, sea $b_{i,j} = 1$ si $j \leq i$ y $b_{i,j} = 0$ si $j > i$. Probar que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}.$$

(b).- Use la parte anterior para calcular $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{n-j+1} \cdot \textcolor{red}{n}$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

■ Resumen

- **[Relación]**: Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$

- **[Propiedades de relaciones]**: Una relación R en A es:

- **Refleja**: si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$
- **Simétrica**: si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- **Antisimétrica**: si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
- **Transitiva**: $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

- **[Ejemplo de relación]**: En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.

- **[Relación de orden]**: $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A , si es una relación **refleja, antisimétrica y transitiva**.

Observación: $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, xey son comparables, es decir $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.

- **[Relación de equivalencia]**: $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A , si es una relación **refleja, simétrica y transitiva**.

- **[Clase de equivalencia]**: Dado un elemento $a \in A$ se define:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$

- **[Conjunto cociente]**: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación $\mathcal{R}$ se le llama conjunto cociente, definido por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

- **[Equivalencias relevantes]**: Sea $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en A y $x, y \in A$. Son equivalentes:

- $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$
- $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$
- $x\mathcal{R}y$
- $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

Obs.: Con esto se deduce que $A/\mathcal{R}$

- **[Congruencia modular]**: Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ por:

$$a \equiv_n b \iff n|(a - b)$$

- **[Teorema de División Entera]**: Sean $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot m + r$ y $0 \leq r < |m|$.

- **[Corolario]**: $\mathbb{Z}_n$ ($:= \mathbb{Z}/\equiv_n$) tiene n elementos:

$$\mathbb{Z}_n = \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\}$$

- **[Sumatoria]**: Sea $(a_i)_{i \geq m}$ secuencia de números. Para $n \geq m$ se define la sumatoria de los términos de $(a_i)_{i \geq m}$ por:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k & \text{si } n > m \end{cases}$$

- **[Propiedades importantes]**: Se tienen las siguientes propiedades:

$$\text{I) } \sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1$$

$$\text{II) } \sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k$$

$$\text{III) } \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k$$

$$\text{IV) } \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s} \text{ para } s \in \mathbb{Z}$$

$$\text{V) } \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^s a_k + \sum_{k=s+1}^n a_k$$

$$\text{VI) } \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1} \text{ (Telescópica)}$$

- **[Sumas importantes]**: Algunas sumas relevantes:

$$\bullet \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ con } a \neq 1$$

“No me hable de miles, hálame de millones, que yo sueño donde quiera que haya oxígeno, cabrones!”
Arcángel