MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 07: Relaciones

12 Junio

P1. ***Relación cualquiera***
Se define en $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{T}$ tal que: $m\mathcal{T}n \iff (m = n) \vee (2|n \wedge 2|m)$. Verifique si es que $\mathcal{T}$ es refleja, simetrica, antisimetrica y transitiva.

a) Intuición:
b) Teoría:
c) Matraca:

P2. Sea E un conjunto no vacío, y $K \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ de la siguiente forma: para $A, B \subseteq E$,

$$A\mathcal{R}_K B \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B.$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.
b) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es una relación de orden $\Leftrightarrow K = E$.

a) Intuición:
b) Teoría:
c) Matraca:

P3. Sea $K \subseteq \mathbb{Q}$ no vacío y $\mathcal{R}_K$ la relación en K definida por: $x\mathcal{R}_K y \iff y - x \in K$.

a) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja si y sólo si $0 \in K$.
b) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es una relación de orden.
c) Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia y encuentre la clase de equivalencia de $1/2$.

a) Intuición:
b) Teoría:
c) Matraca:

P4. Sea $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $(p, q)\mathcal{R}(p', q')$ si existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $p - p' = 4r$ y $q - q' = 5s$.

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Demuestre que el conjunto cuociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{R}$ tiene 20 elementos y dé representantes para cada clase de equivalencia.

a) Intuición:
b) Teoría:
c) Matraca:

P5. Sea $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ dada por: $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow (n = m) \vee (n \text{ es par } \wedge m = n + 1) \vee (n \text{ es impar } \wedge m = n - 1)$.

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

b) Encuentre el conjunto cuociente $\mathbb{N}/\mathcal{R}$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P6. Sea $\mathcal{R}$ una relación en $\mathbb{N}$ y sea $\hat{\mathcal{R}}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dada por $f\hat{\mathcal{R}}g$ si $\forall n \in \mathbb{N}, f(n)\mathcal{R}g(n)$.

a) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1) $\hat{\mathcal{R}}$ es refleja si y sólo si $\mathcal{R}$ lo es.
2) $\hat{\mathcal{R}}$ es simétrica si y sólo si $\mathcal{R}$ lo es.
3) $\hat{\mathcal{R}}$ es antisimétrica si y sólo si $\mathcal{R}$ lo es.
4) $\hat{\mathcal{R}}$ es transitiva si y sólo si $\mathcal{R}$ lo es.
5) $\hat{\mathcal{R}}$ es un orden total si y sólo si $\mathcal{R}$ lo es.

b) Suponga ahora que $\mathcal{R}$ es la relación definida por: $x\mathcal{R}y \iff x = y$. Determine las clases de equivalencia en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\hat{\mathcal{R}}$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

- **Resumen**
- [**Relación**]: Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$
- [**Propiedades de relaciones**]: Una relación R en A es:
  - **Refleja**: si $\forall x \in A$, $x\mathcal{R}x$
  - **Simétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y y\mathcal{R}x$
  - **Antisimétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x$
  - **Transitiva**: $\forall x, y, z \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- [**Ejemplo de relación**]: En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.
- [**Relación de orden**]: $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, si es una relación **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.
  Observación: $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, xey son comparables, es decir $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.
- [**Relación de equivalencia**]:$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, si es una relación **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.
- [**Clase de equivalencia**]: Dado un elemento $a \in A$ se define:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$

- [**Conjunto cuociente**]: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación $\mathcal{R}$ se le llama conjunto cuociente, definido por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

- [**Equivalencias relevantes**]: Sea $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en A y $x, y \in A$. Son equivalentes:
  I) $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$
  II) $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$
  III) $x\mathcal{R}y$
  IV) $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

  Obs.: Con esto se deduce que $A/\mathcal{R}$
- [**Congruencia modular**]: Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ por:

$$a \equiv_n b \Longleftrightarrow n|(a - b)$$

- [**Teorema de División Entera**]: Sean $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot m + r$ y $0 \leq r < |m|$.
- [**Corolario**]: $\mathbb{Z}_n$ $(:= Z/\equiv_n)$ tiene n elementos:

$$\mathbb{Z}_n = \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\}$$

- [**Sumatoria**]: Sea $(a_i)_{i \geq m}$ secuencia de números. Para $n \geq m$ se define la sumatoria de los términos de $(a_i)_{i \geq m}$ por:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k & \text{si } n > m \end{cases}$$

- [**Propiedades importantes**]: Se tienen las siguientes propiedades:
  I) $\sum\limits_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
  II) $\sum\limits_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$
  III) $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=m}^{n} b_k$
  IV) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$ para $s \in \mathbb{Z}$
  V) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m}^{s} a_k + \sum\limits_{k=s+1}^{n} a_k$
  VI) $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ **(Telescopica)**
- [**Sumas importantes**]: Algunas sumas relevantes:
  - $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ con $a \neq 1$

““Cero racismo, cero egoismo, voy pa lante porque creo en mi mismo.””
D.Y