$= 2^{n+1} + 1$

$\therefore$ Se concluye por inducción que $u_n = 2^n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b) Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in (-1, 0]$

P.D.Q. $(1+a_1)(1+a_2)\cdot \dots \cdot(1+a_n) \geq 1 + a_1 + \dots + a_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

En efecto: Haremos inducción sobre la cantidad de términos

Caso base: Para $n = 1$ es obvio:

$(1+a_1) \geq 1 + a_1$ ✓ Se cumple

Hipótesis: Para algún $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot \dots \cdot (1+a_n) \geq 1 + a_1 + \dots + a_n$

Caso inductivo:

P.D.Q.: $(1+a_1)(1+a_2)\cdot \dots \cdot (1+a_n)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}$

En efecto:

Tenemos que:

$\underbrace{(1+a_1)\cdot \dots \cdot (1+a_n)}_{\text{Usando H.I.}} \cdot (1+a_{n+1}) \geq (1+a_1+\dots+a_n)(1+a_{n+1})$

Usando H. I.

Distribuyendo

$= \underbrace{1 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}_{\text{Aquí ya tenemos lo que queremos!}} + \underbrace{a_1 \cdot a_{n+1} + \dots + a_n \cdot a_{n+1}}_{\text{Nos gustaría deshacernos de esto}}$

Aquí ya tenemos lo que queremos!

Nos gustaría des de esto

Veamos que $a_1 \cdot a_{n+1} + \dots + a_n \cdot a_{n+1} \geq 0$

en efecto: basta ver que $a_i \in [-1,0]$ por enunciado,
luego $a_i \cdot a_{n+1} \geq 0$ pues $a_i \leq 0 \wedge a_{n+1} \leq 0$
por ende - como ambos son negativos o 0 - obligatoriamente
su producto es positivo. Así $a_i \cdot a_{n+1} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

luego $$\underbrace{a_1 \cdot a_{n+1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_2 \cdot a_{n+1}}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{a_n \cdot a_{n+1}}_{\geq 0} \geq 0$$

$\therefore$

$$1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_1 \cdot a_{n+1} + \ldots + a_n \cdot a_{n+1}$$

$$\geq 1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$

Así, se tiene: $(1+a_1) \cdot \ldots \cdot (1+a_{n+1}) \geq 1 + a_1 + \ldots + a_{n+1}$

Concluyendo lo pedido ■

Pauta auxiliar 6

P1] Sea $f: A \longrightarrow B$, y $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$

a) Veamos que no necesariamente es cierto que:

$$f(A \setminus X) = B \setminus f(X).$$

Existen infinitas formas de verlo, una de ellas es:

Consideremos el caso $X = \phi$. Aquí:

$$f(A \setminus X) = B \setminus f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(A \setminus \phi) = B \setminus f(\phi)$$

$$\Leftrightarrow f(A) = B \setminus \phi \quad \Big| \text{ Usando que } f(\phi) = \phi$$

$$\Leftrightarrow f(A) = B$$

$$\Leftrightarrow f \text{ es epiyectiva}$$

Pero f no necesariamente es epiyectiva

b) Supongamos f epiyectiva

P.D.Q. $f(f^{-1}(Y)) = Y$

En efecto: Usaremos el siguiente lema:

Lema: Si f es función, entonces $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(A)$

(El profe me dijo que lo mandó de tarea, pero igual lo demostraremos en anexo)

En este caso, como f es función:

$$f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(A)$$

y como f es epiyectiva: $f(A) = B$.

Usando esto:

$$f(f^{-1}(Y)) = Y \cap B$$
$$= Y \quad \Big| \text{ Como } Y \subseteq B \Rightarrow Y \cap B = Y$$

Concluyendo.

Anexo: Veamos que $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(A)$

$\subseteq$) Sea $z \in f(f^{-1}(Y))$ arbitrario

$\Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(Y),\ z = f(x)$ | Def de Conjunto Imagen

Como $z = f(x) \Rightarrow z \in f(A)$, (pues $x \in f^{-1}(Y) \subseteq A$)

además como $x \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(x) \in Y$, y como $z = f(x)$ entonces $z \in Y$. Luego $z \in Y \cap f(A)$

$\therefore$ Se concluye que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y \cap f(A)$.

$\supseteq$) Sea $z \in Y \cap f(A)$

Como $z \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A,\ z = f(x)$

Como $f(x) = z \in Y \Rightarrow x \in f^{-1}(Y)$

Luego $\exists x \in f^{-1}(Y),\ z = f(x)$

$\Leftrightarrow z \in f(f^{-1}(Y))$

$\therefore$ Concluimos que $f(f^{-1}(Y)) \supseteq Y \cap f(A)$

Así, por doble inclusión: $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(A)$

c) P.D.Q. $f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c$

En efecto:

Si:

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(Y^c) &\iff f(x) \in Y^c \\
&\iff \sim(f(x) \in Y) \\
&\iff \sim(x \in f^{-1}(Y)) \\
&\iff x \in f^{-1}(Y)^c
\end{aligned}
$$

Concluyendo //

Para el recordar que la preimagen se porta bien con todo, i.e.:

- $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$
- $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
- $f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c$