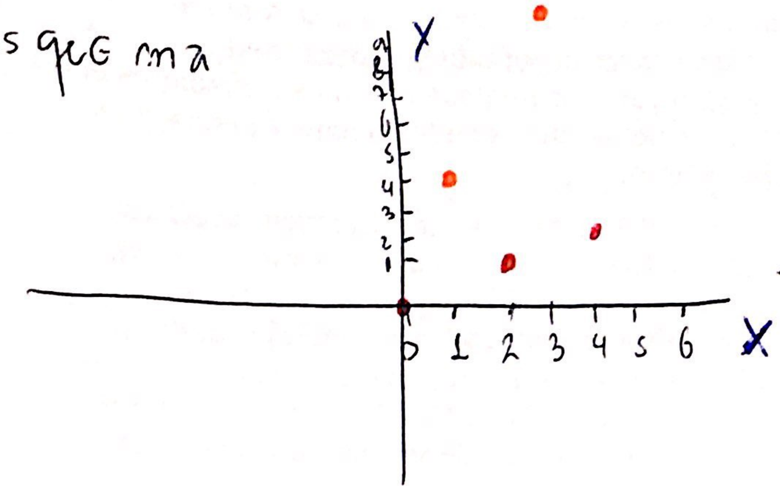
P1)- Se define la función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

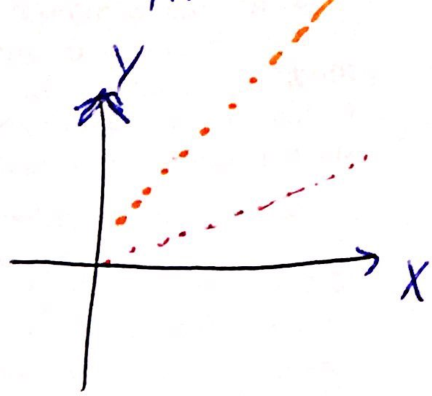
$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es Impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Grafo

Esquema



Más lejos



Bueno esto no prueba nada, solo es para ver como se comporta

a) Recuerdo

Inyectividad: Diremos que función $f: A \to B$ es inyectiva $\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- f es inyectiva? de primera sabemos que la función está bien definida pues no hay número par e impar a la vez.
- luego vamos con $\forall x_1, x_2 \in A = \mathbb{N}$ para el problema
- luego tenemos 3 casos

1) x_1, x_2 Impares $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
2) x_1, x_2 Pares $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
3) x_1 par y x_2 Impar (o viceversa) $\Rightarrow \frac{x_1}{2} = 3x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

PAR IMPAR

$\Leftrightarrow x_1 = 6x_2 + 2$ lo que realmente nos implica ~~ocurre pues nada es par e impar a la vez~~ pues $x_1 \neq x_2$ //

∴ f no inyectiva por tramos (tramo 3)
∴ f no inyectiva en su dominio $\mathbb{N}$.

b) Recuerdo

Epiyectivo: Diremos que una función
$f: A \to B$ epiyectiva
$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$

Otra forma como se puede comprender es lo siguiente

Sea $g: C \to R \subseteq D$ cuando tengo $R = D$; Es decir el recorrido es igual al codominio la función es epiyectiva

$\downarrow$ función, $\downarrow$ Dominio, $\downarrow$ Recorrido, $\downarrow$ Codominio

Por qué? $\forall y \in D, \exists x \in C$ tq $y = f(x)$ es decir todos los elementos fueron generados por alguien

• Volviendo al problema podemos ver que la definición nos dice

$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$ Como queremos probar un para todo si esto no ocurre basta con un contraejemplo. (Para cuando sepamos que no pasa)

• La intuición que dibujamos nos dice que intercalado llega a $\mathbb{N}$ por a todos los naturales?

Esto es lo que no interesa; sea $y \in \mathbb{N}$ arbitrario, $\mathbb{N} = B$, PDQ $\exists x \in A = \mathbb{N}$ tq $y = f(x)$; $y = f(x)$; sabemos que $y \in \mathbb{N}$ por lo que sabemos como se define $f(n)$ si $y \in \mathbb{N}$; basta $x = 2y$

Como $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 2y \in \mathbb{N}$ luego $x \in \mathbb{N}$ (cualquier natural fue generado por $x = 2y$) $\therefore \forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}$ tq $y = f(x)$ //

como fue arbitrario

$\therefore$ Epiyectiva

Luego No es Biyectiva por falta de inyectividad

Para poder estudiar la inversa debe ser bigectiva podemos redefinir

$\hat{f}; \tilde{m} = 2m, \forall m \in \mathbb{N}$ entonces

$\hat{f}: \{Pares\} \to \mathbb{N}$ donde por construcción será bigectiva

por lo probado anteriormente,

luego como si $g: A \to B$ se def $g^{-1}: B \to A$

$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$

Veamos $\forall x \in \{Pares\}, \forall y \in \mathbb{N}, \frac{x}{2} = y \quad / \cdot 2$

$\iff x = 2y = f^{-1}(y)$

luego encontramos la inversa explícita para cualquier imagen o preimagen. //

P3) E conj de referencia, $A \subseteq E$ (5)

$\varphi : P(E) \to P(E)$ tq $\varphi(X) = X \Delta A$, $\forall X \in P(E)$

Inyectiva: Sea $X, Y \in P(E)$ arbitrarios

Si probamos $\varphi(A) = \varphi(B) \Rightarrow A = B$ es inyectiva

$\varphi(X) = \varphi(Y)$ la cancelación solo se tiene para $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow X \Delta A = Y \Delta A \quad / \Delta A$

$\Rightarrow (X \Delta A) \Delta A = (Y \Delta A) \Delta A \quad$ / Asociatividad

$\Leftrightarrow X \Delta (A \Delta A) = Y \Delta (A \Delta A)$

$\Leftrightarrow X \Delta \phi = Y \Delta \phi$

$\Leftrightarrow X = Y \quad \therefore$ inyectiva

Epiyectiva $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A$ tq $y = f(x) \Leftrightarrow \forall y \in P(E), \exists x \in P(E), y = \varphi(x)$

Sea $y \in P(E)$ arbitrario $\quad y = X \Delta A \quad / \Delta A$

$\Rightarrow Y \Delta A = (X \Delta A) \Delta A$

$\Leftrightarrow Y \Delta A = X \Delta (A \Delta A)$

$\Leftrightarrow Y \Delta A = X \Delta \phi = X$

Entonces $\exists X \in P(E) = B$ tq $y = X \Delta A$ //

$\therefore$ sobreyectiva

Biyectividad $\Leftrightarrow$ inyectiva $\wedge$ sobreyectiva

Por lo que existe inversa, tentativamente $\varphi^{-1}(W) = W \Delta A$, $\forall W \in P(E)$

Si $\varphi(\varphi^{-1}(X)) = X \wedge \varphi^{-1}(\varphi(X)) = X$ ganamos

$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(X) \Delta A = (X \Delta A) \Delta A = X \wedge \varphi(X) \Delta A = (X \Delta A) \Delta A = X$

$\therefore \varphi^{-1}(X) = X \Delta A$ //

P2) 3) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f bijectiva tq

$$g \circ f = g(f(x)) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5} \quad , f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

Sabemos $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} \iff 3y = x-2$

$\iff 3y+2 = x$ intercambio variables

Luego $\boxed{f(x) = 3x+2}$ *

$f^{-1}(f(x)) = x$ probaremos esto para comprobar

$$\frac{f(x)-2}{3} = \frac{3x+\cancel{2}-\cancel{2}}{3} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x$$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$$\cancel{3}\left(\frac{x-2}{\cancel{3}}\right)+2 = x$$

Teo de inversa
$f : A \to B$
$g : B \to A$
f bijectiva con inversa g
si satisface al menos 2
• $g \circ f = id_A = x$
• $f \circ g = id_B = x$
Teorema ⇒ g bijectiva
muestra problema

Veamos.

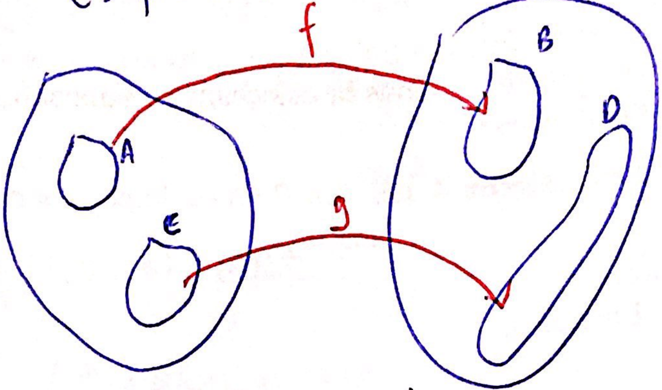
$$g(f(x)) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5} \overset{*}{=} \frac{f(x)}{(3x+2)^2+1} = \frac{f(x)}{f(x)^2+1} \quad ; \quad f(x)^2+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

luego con $u = f(x) \Rightarrow g(u) = \frac{u}{u^2+1}$, $\forall u \in \mathbb{R}$ //

P4) A, B, C, D conjutos no vacíos

$A \cap C = \phi$ $\quad f: A \to B$ $\quad$ Esquema

$B \cap D = \phi$ $\quad g: C \to D$



$h: A \cup C \to B \cup D$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

a) f y g inyectivos, Sea $x, y \in A \cup C$ podemos notar que todas las opciones que tenemos $x, y \in A \vee x, y \in C \vee (x \in A \wedge y \in C)$ o viceversa

Si $\underbrace{\begin{matrix} x \in A \wedge y \in C & f(x) = g(y) \\ y \in A \wedge x \in C & f(y) = g(x) \end{matrix}}_{\text{Argumentación análoga}}$

pero $f(x) \subseteq B \wedge g(y) \subseteq D$
$\Rightarrow f(x) \subseteq D$, luego sea $a \in f(x)$
$\Rightarrow a \in B \wedge a \in f(x) \Rightarrow a \in D$
$\exists a \in B \cap D \neq \phi$ $\times$ este caso no ocurre

$x, y \in A \Rightarrow f(x) = f(y)$ Por hipótesis f inyectiva $\therefore h(x)$ lo es
$\Rightarrow x = y$

$x, y \in C \Rightarrow g(x) = g(y)$ Por hipótesis g inyectiva $\therefore h(x)$ lo es
$x = y$

b) f y g sobreyectivos PDQ $h(x)$ lo es $\forall y \in B \cup D, \exists x \in A \cup C, h(x) = y$

Sabemos que f es inyectiva, veamos que pasa si tomo un elemento arbitrario en $B \cup D$, sea $y \in B \cup D$ si $y \in B, \exists x \in A \subseteq A \cup C$ tq $f(x) = y$
$\Rightarrow h(x) = y$; luego si $y \in D$, $\exists x \in C$, tq $f(x) = y \Rightarrow h(x) = y$

Como y arbitrario y para todos los casos se tiene que existe $x \in A \cup C$ tq $h(x) = y$
$\therefore$ epiyectiva

c) f, g biyectiva pdq h biyectiva

Por la parte anterior

f, g inyectiva $\Rightarrow h(x)$ inyectiva

f, g epiyectiva $\Rightarrow h(x)$ epiyectiva

$\therefore h(x)$ biyectiva tq $h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & x \in B \\ g^{-1}(x) & x \in D \end{cases}$

$f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: A \to C$ g inyectiva $h = g(f(x))$ biyectiva.

P5) Veamos que f inyectiva, sea $x, y \in A$ su dominio estudiamos $f(x) = f(y)$ / $g(\,)$

$\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$

$\Leftrightarrow h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$ pues h inyectiva $\therefore f$ inyectiva

Veamos que g es epiyectiva, h es sobreyectiva (epiyectiva)

luego $\forall w \in C, \exists x \in A$ tq $h(x) = w$

$\Leftrightarrow \forall w \in C, \exists x \in A$ tq ~~$f(g(x)) = w$~~ $g(f(x)) = w$

luego $f(x) \in B$ podemos definir $a = f(x) \in B$

$\Leftrightarrow \forall w \in C, \exists a \in B$ tq $g(a) = w$ $\therefore$ es epiyectiva

Como probamos que g es inyectiva y epiyectiva tiene inversa

Veamos f epiyectiva, Como h epiyectiva

$\forall w \in C, \exists x \in A$ tq $h(x) = w$

$\Leftrightarrow \forall w \in C, \exists x \in A$ tq $\underbrace{g(f(x)) = g(b)}_{b} = y$, $b \in B$ cualquiera

$y \in C$ entonces es un $g(b)$

Como g admite inversa $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists x \in A$ tq $f(x) = b$ $\therefore$

f epiyectiva $\therefore f, g$ biyectiva luego $h = g(f(x))$ / $g^{-1}(\,)$ $\to$ existe

$g^{-1}(h(x)) = g^{-1}(g(f(x))) = f(x)$ / $f^{-1}(\,)$ Existe

$\Leftrightarrow (g^{-1} \circ h)^{-1} = (g^{-1}(h(x)))^{-1} \stackrel{prop}{=} h^{-1}(g(x)) = f^{-1}(x)$

Pauta auxiliar 5

P1)

a) $f : [1,2] \longrightarrow [1,\infty)$

$$x \longmapsto f(x) = x^4 + 2$$

• ¿ Inyectiva? ¡ En efecto! :

Sean $x_1, x_2 \in [1,2]$, veamos que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Si $f(x_1) = f(x_2)$ esto equivale a :

$$x_1^4 + 2 = x_2^4 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^4 = x_2^4$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^4 - x_2^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

Como $x_1, x_2 \in [1,2] \Rightarrow x_1^2 > 0 \wedge x_2^2 > 0$

luego $x_1^2 + x_2^2 > 0$

Así :

$$(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

De igual manera $x_1 > 0$ y $x_2 > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0$

luego

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 = x_2}$$ que es a lo que queríamos llegar

$\therefore$ f es inyectiva

• ¿ epiyectiva? NO :

El intervalo $[1,2]$ (= dom f) es muy pequeño ! en cambio el codominio es gigante $[1,\infty)$, si tomamos - por ejemplo -

$y = 10^4 + 4 \in [1,\infty)$

tenemos que si $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow y = x^4 + 4$$

$$\Leftrightarrow 10^4 + 4 = x^4 + 4$$

$$\Leftrightarrow 10^4 = x^4$$

Usando $x>0$ pues $x \in [1,2]$

$$\Leftrightarrow 10 = x$$

... pero $10 \notin [1,2]$ ——X——

$\therefore$ $y = f(x) \Leftrightarrow F$, luego f no es sobreyectiva !

finalmente, como f no es sobreyectiva, entonces tampoco es biyectiva.

b) Sean $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se define $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{-b}{a}\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{c}{a}\}$

por $f(x) = \dfrac{cx}{ax+b}$

• ¿ Inyectiva? En efecto :

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$, veamos que $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

En efecto : Si $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{cx_1}{ax_1+b} = \frac{cx_2}{ax_2+b}$$

$$\Leftrightarrow c x_1 (a x_2 + b) = c x_2 (a x_1 + b)$$

$$\Leftrightarrow a c x_1 x_2 + b c x_1 = a c x_1 x_2 + b c x_2$$

$$\Leftrightarrow b c x_1 = b c x_2$$

Cancelando $a c x_1 x_2$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Dividiendo por b y c (se puede porque $b \neq 0 \wedge c \neq 0$)

Que es a lo que queríamos llegar.

$\therefore$ f es inyectiva

• ¿Epiyectiva? En efecto: Sea $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{c}{a}\}$, veamos que existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ tal que $f(x) = y$. En efecto:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{cx}{ax+b}$$

$$\Leftrightarrow axy + by = cx$$

$$\Leftrightarrow by = (c - ay)x$$

$$\Leftrightarrow \frac{by}{c-ay} = x$$

¿por qué podemos pasar dividiendo?

...

luego, $f\left(\frac{by}{c-ay}\right) = y$, pero sabemos si $\frac{by}{c-ay} \in \mathbb{R}$?

veamos:

El único caso problemático es cuando $\frac{by}{c-ay} = -\frac{b}{a}$

veamos que esto no puede pasar:

Si

$$\frac{by}{c-ay} = \frac{-b}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad bay = -b(c-ay)$$

$$\Leftrightarrow \quad ay = -(c-ay)$$

Usando $b \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad ay = -c+ay$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -c$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 0$$

pero se supone que $c \neq 0$ $\quad$ Contradicción

$\therefore \quad \frac{by}{c-ay} \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\} \quad \therefore$ f es sobreyectiva.

• ¿Biyectiva? En efecto! : Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva, cuya inversa está dada por:

$$f^{-1}(y) = \frac{by}{c-ay}$$

Pauta auxiliar 5

P2]

$$f, g : P(E) \longrightarrow P(E)$$

definidas por: $f(X) = A \cap X$ y $g(X) = A \cup X$

a) **P.D.Q.** f inyectiva $\Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow f$ epiyectiva

En efecto: Veamos primero f inyectiva $\Leftrightarrow A = E$:

$\Rightarrow$] Si f es inyectiva, entonces $f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2$

Con la idea de querer ver que $A = E$, tomemos $X_1 = A$ y $X_2 = E$

Notar que:

$$f(A) = A \cap A = A$$

$$f(E) = A \cap E = A$$

Luego $f(A) = f(E)$ y como f es inyectiva $\Rightarrow A = E$

$\Leftarrow$] Si $A = E$, tenemos que:

$$f(X) = A \cap X = E \cap X = X$$

O sea f es la identidad, la cual es inyectiva

$\therefore$ Concluimos que f inyectiva $\Leftrightarrow A = E$

Ahora veamos que $A = E \Leftrightarrow f$ epiyectiva :

$\Rightarrow$] Si $A = E$, entonces $f(X) = X$, la identidad, la cual es sobreyectiva.

$\Leftarrow$) Sabemos que f es sobreyectiva y queremos ver que $A = E$.

Recordar que: f sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall Y \in P(E), \exists X \in P(E)$ tal que:

$$f(X) = Y$$

En particular como $E \in P(E)$, $\exists X$ tal que:

$$E = f(X)$$

$$\Leftrightarrow \quad E = A \cap X$$

pero: $E = A \cap X \subseteq A$

y además $A \subseteq E$

Luego $A \subseteq E \wedge E \subseteq A \Rightarrow A = E$

que es lo que se quería ver.

6) Con g es muy análogo:

Veamos g inyectiva $\Leftrightarrow A = \phi$:

$\Rightarrow$) Como g inyectiva, $g(X_1) = g(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2$

tomando $X_1 = \phi$ y $X_2 = A$ notamos que:

$g(\phi) = A \cup \phi = A$

$g(A) = A \cup A = A$

Luego: $g(A) = g(\phi) \Rightarrow A = \phi$

$\Leftarrow$ Si $A=\phi$ tenemos:

$$f(X) = A \cup X = \phi \cup X = X$$

$\therefore$ f es la identidad, la cual es inyectiva.

$\therefore$ Concluimos que f inyectiva $\Leftrightarrow A=\phi$

Ahora veamos que $A=\phi \Leftrightarrow f$ epiyectiva:

$\Rightarrow$ Si $A=\phi$, $f(X) = X$ que es la identidad, la cual es epiyectiva

$\Leftarrow$ Sabemos que f es sobreyectiva, luego debe existir $X \in P(E)$ tal que $\phi = f(X)$.

$$\Leftrightarrow \phi = A \cup X$$

y como $A \subseteq A \cup X = \phi$

y $\phi \subseteq A$

Se concluye que $A \subseteq \phi \wedge \phi \subseteq A \Rightarrow \phi = A$

Que es lo que se quería ver.

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl