MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Resumen Introducción al Álgebra C1 Formativo 2020

Les va a ir bacan

Resumen Lógica

- **[Tautologías básicas]**: Las siguientes proposiciones son tautologías:
  a) ***Dominancia***: $p \vee V \Leftrightarrow V, \quad p \wedge F \Leftrightarrow F$
  b) ***Identidad***: $p \wedge V \Leftrightarrow p, \quad p \vee F \Leftrightarrow p$
  c) ***Idempotencia***: $p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$
  d) ***Doble negación***: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
  e) ***Tercio excluso***: $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow V$
  f) ***Consistencia***: $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow F$
  g) ***Absorción***: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p, \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
  h) ***Relajación***: $p \wedge q \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow p \vee q$
  i) ***Caracterización de la implicancia***: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$

- **[Álgebra Booleana]**: Son tautologías:
  - ***Leyes de De Morgan:*** $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
  - ***Conmutatividad:***
    Del $\vee : p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
    Del $\wedge : p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
  - ***Asociadtividad***
    Del $\vee : p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
    Del $\wedge : p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
  - ***Distributividad***
    Del $\wedge$ con respecto al $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
    Del $\vee$ con respecto al $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- **[Tautologías relevantes]**: Otras tautologías a tener en cuenta son:
  a) ***Doble implicancia***: $(p \Leftrightarrow q) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
  b) ***Modus Ponens***: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
  c) Transitividad: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
  d) ***Contrarecíproca***: $(p \Rightarrow q) \iff (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
  e) ***Contradicción***:
    - Forma 1: $q \iff (\overline{q} \implies F)$
    - Forma 2: $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow [p \wedge \overline{q}] \Rightarrow F$

- **[Negación de cuantificadores]**:
  a) $\overline{(\exists x)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$
  b) $\overline{(\forall x)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$

- **[Existencia y unicidad]**: Se define el cuantificador de existencia y unicidad ($\exists!$) como sigue:

$$(\exists! x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)\{(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)\}]$$

Resumen Principio de Inducción

- **[Principio de inducción]**: Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una función proposicional, se tiene que la proposición:

$$\forall n \geq n_0, P(n) \tag{1}$$

  Es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{Caso\ base} \wedge \ [\forall n \geq n_0, \ \underbrace{P(n)}_{H.I.\ (d\acute{e}bil)} \ \Rightarrow P(n+1)]$$

  Observación: Este tipo de inducción también es conocida como inducción débil.

- **[Principio de inducción Fuerte]**: También tenemos que la proposición (1) es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{Caso\ base} \wedge \ [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n)}_{H.I.\ (fuerte)} \Rightarrow P(n+1)]$$

  Esta inducción es llamada inducción fuerte pues ocupa completamente la hipótesis inductiva.

Resumen Conjuntos

- **[Nociones básicas]**:
  - ***Conjunto Referencia***: Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Si denotamos E al conjunto de referencia, tenemos que $x \in E$ es siempre verdad.
  - ***Conjunto vacío***: Se define el conjunto $\emptyset$ como el conjunto que no posee elementos, es decir $x \in \emptyset$ es siempre falso.

- **[Definiciones Básicas]**: Sean A y B conjuntos, se define:
  - *Igualdad:* $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
  - *Inclusión:* $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$
  - *Unión:* $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
  - *Intersección:* $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
  - *Complemento:* $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$
  - *Diferencia:* $A \setminus B := A \cap B^c$
  - *Diferencia simétrica:* $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- **[Propiedades de inclusión]**: Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos:
  a) $\emptyset \subseteq A \subseteq E$
  b) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
  c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$

- **[Propiedades de igualdad]**: Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos:
  a) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
  b) $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$
  c) $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$
  d) *Ley de De Morgan*
    - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- **[Equivalencias útiles]**: Son equivalentes:
  I) $A \subseteq B$
  II) $B^c \subseteq A^c$
  III) $A \cap B^c = \emptyset$
  IV) $B \cup A^c = E$

Resumen Funciones

- [**Producto Cartesiano**]: Para $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ se define el conjunto $A \times B$ como: $A \times B := \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$
- [**Algunas propiedades**]: Sí $A_1, A_2 \subseteq E$ y $B_1, B_2 \subseteq F$ entonces:
  1. $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times B_1 = \emptyset$
  2. $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$
  3. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$
  4. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$
- [**Conjunto potencia**]: Se define el conjunto potencia (o tambien llamado conjunto de las partes) $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

Obs. : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ siempre.

- [**Unión e intersección de Conjuntos potencia**]:
  1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
  2. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
- [**Partición de conjuntos**]: Llamaremos a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ partición de A si se cumple:
  - $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$
  - $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
  - $\mathcal{C}$ cubre A: $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$
- [**Definición Función**]: Una función de A a B ($f : A \longrightarrow B$) es una 3-tupla $f = (A, B, G)$ que satisface:
  - $G \subseteq A \times B$
  - $\forall a \in A, \exists! b \in B,\ (a,b) \in G$

Obs. : Para clarificar conceptos:

- Podemos escribir $b = f(a)$ pues b -dado a- posee un unico valor.
- $G = \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
- A es llamado dominio de f ($Dom\ f$) y B codominio de f ($Cod\ f$).

- [**Igualdad de Funciones**]: Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones, entonces

$$f = g \Longleftrightarrow Dom\ f = Dom\ g \wedge Cod\ f = Cod\ g \wedge \forall x \in Dom\ f, f(x) = g(x)$$

Obs. : Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales: $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$

- [**Inyectividad**]: Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- [**Epiyectividad**]: Diremos que una función $f : A \to B$ es epiyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A,\ y = f(x)$$

Continuación Resumen Funciones

- [**Conjunto Imagen**]: Sea $f : A \longrightarrow B$ función, y $C \subseteq A$. Se define el conjunto imagen de C por f:

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

- [**Equivalencia epiyectividad**]: $f : A \longrightarrow B$ es epiyectiva si y solo si $f(A) = B$

- [**Propiedades Imagen**]:

  I) $A \subseteq C \Longrightarrow f(A) \subseteq f(C)$

  II) $f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C)$

  III) $f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$

- [**Conjunto Preimagen**]: Sea $f : A \longrightarrow B$ función, y $D \subseteq B$. Se define el conjunto preimagen de D por f:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

- [**Propiedades PreImagen**]:

  I) $B \subseteq D \Longrightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(D)$

  II) $f^{-1}(B \cap D) = f(B) \cap f^{-1}(D)$

  III) $f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$

- [**Inclusiones relevantes**]: Sea $f : A \longrightarrow B$, con $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, entonces:

  - $C \subseteq f^{-1}(f(C))$
  - $f(f^{-1}(D)) = D \cap f(A)$ En particular: $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$

- [**Inyectividad y sobreyectividad**]: Sea $f : A \longrightarrow B$ función. Se tiene:

  I) f es inyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, [f^{-1}(\{y\}) = \emptyset]$$

$$\vee \quad (\exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$$

  II) f es epiyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

  III) f si es biyectiva, entonces:

$$\forall C \subseteq B, f^{-1}(\{y\}) = (\{f^{-1}(y)\})$$