MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 04: conjuntos y Funciones

08 de Abril

Resumen

- **[Producto Cartesiano]**: Para $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ se define el conjunto $A \times B$ como: $A \times B := \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$
- **[Algunas propiedades]**: Sí $A_1, A_2 \subseteq E$ y $B_1, B_2 \subseteq F$ entonces:
  1. $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times B_1 = \emptyset$
  2. $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$
  3. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$
  4. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$
- **[Conjunto potencia]**: Se define el conjunto potencia (o tambien llamado conjunto de las partes) $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

  Obs. : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ siempre.
- **[Unión e intersección de Conjuntos potencia]**:
  1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
  2. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
- **[Partición de conjuntos]**: Llamaremos a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ partición de A si se cumple:
  - $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$
  - $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
  - $\mathcal{C}$ cubre A: $\bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C = A$
- **[Definición Función]**: Una función de A a B ($f : A \longrightarrow B$) es una 3-tupla $f = (A, B, G)$ que satisface:
  - $G \subseteq A \times B$
  - $\forall a \in A, \exists! b \in B,\ (a,b) \in G$

  Obs. : Para clarificar conceptos:
  - Podemos escribir $b = f(a)$ pues b -dado a- posee un unico valor.
  - $G = \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
  - A es llamado dominio de f ($Dom\ f$) y B codominio de f ($Cod\ f$).
- **[Igualdad de Funciones]**: Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones, entonces

$$f = g \Longleftrightarrow Dom\ f = Dom\ g \wedge Cod\ f = Cod\ g \wedge \forall x \in Dom\ f, f(x) = g(x)$$

  Obs. : Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales: $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$
- **[Inyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- **[Epiyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es epiyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A,\ y = f(x)$$

[MÓDULO COMÚN]
En lo que sigue, $E \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$ denotan conjuntos de referencia.Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$.

P1. *a*) Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.

b) Pruebe que $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. Muestre, con un contraejemplo, que no se tiene la igualdad.

c) Pruebe que $A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \implies C = D$.

1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

P2. ***[MÓDULO PROPIO]Dos en uno***
Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ funciones. Se define $h : A \times B \to C \times D$ de modo que

$$h(a, b) = (f(a), g(b))$$

Pruebe que:

$$h \text{ es inyectiva (epiyectiva)} \Leftrightarrow f, g \text{ son inyectivas (epiyectivas)}$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. ***[MÓDULO COMÚN]***

a) Encuentre (enumere) todos los elementos de $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{0,1\} \times \{0,1,2\})$ donde

$$C \in \mathcal{A} \iff \forall (x, y), (x', y') \in C, x + y = x' + y'.$$

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $D_n = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, a + b = n\}$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{D_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Indicación: Se dice que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es una partición de A si las siguientes condiciones se cumplen:

- $\forall C \in \mathcal{C}$, $C \neq \emptyset$.
- $\forall C, C' \in \mathcal{C}$, si $C \neq C'$, entonces $C \cap C' = \emptyset$.
- $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$.

1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

P4. ***[MÓDULO COMÚN]***
Sea $A \subseteq E$ y suponga que E tiene al menos dos elementos. Pruebe que

$$(\forall B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, A \subseteq B) \implies A = \emptyset.$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P5. ***[MÓDULO PROPIO]Propiedades de las partes***
Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$, demuestre que:

I) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

II) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$

III) $\mathcal{P}(A) = \{A \cap X \mid X \in \mathcal{P}(E)\}$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

PROPUESTOS

P6. ***[MÓDULO PROPIO]Particiones***

a) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto B. Sea $A \subseteq B$ subconjunto, se define $\mathcal{C}_A := \{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}, C \cap A \neq \emptyset\}$. Pruebe que $\mathcal{C}_A$ es una partición de A.

b) Dado $n \in \mathbb{R}$ define el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^2$:

$$L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n\}$$

Pruebe que $\mathcal{C} = \{L_n \mid n \in \mathbb{R}\}$ es partición del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).

c) Encuentre una partición para la mitad superior del plano cartesiano, es decir para:

$$\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

P7. ***[MÓDULO PROPIO]Función diferencia***
Dado $A \in \mathcal{P}(E)$ se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ por:

$$f(X) = A\Delta X$$

Verifique si

a) f es inyectiva

b) f es sobreyectiva.

P8. ***[MÓDULO COMÚN]***

Se quiere definir una función con dominio $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y codominio $\mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, indique si queda bien definida (justifique):

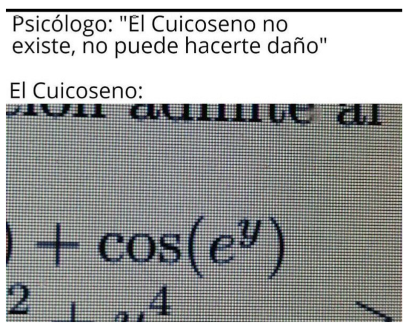
1. A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el menor elemento en S.
2. A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el mayor elemento en S.
3. A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el menor elemento en $S \cup S^c$.

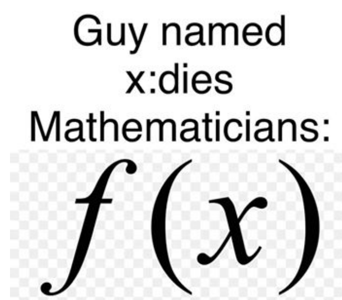
P9. ***[MÓDULO COMÚN]***

a) Sean $A, B \subseteq E$. Pruebe que $\mathcal{P}(A) = \{X \cup Y \subseteq E \mid X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge Y \in \mathcal{P}(A \setminus B)\}$.

b) Sea $A \subseteq E$ y suponga que E tiene al menos dos elementos. Pruebe que

$$(\forall B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, A \subseteq B) \implies A = \emptyset.$$





"Nos esforzamos por emplear solo figuras simétricas, que no solo deberían ser una ayuda para el razonamiento, a través del sentido de la vista, sino que también deberían ser hasta cierto punto elegantes en sí mismas."
John Venn