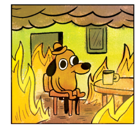
MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 03: Conjuntos

Fecha:Originalmente el día del trabajador y trabajadora :c

Resumen

- [**Nociones básicas**]:
  - ***Conjunto Referencia***: Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Si denotamos E al conjunto de referencia, tenemos que $x \in E$ es siempre verdad.
  - ***Conjunto vacío***: Se define el conjunto $\emptyset$ como el conjunto que no posee elementos, es decir $x \in \emptyset$ es siempre falso.
- [**Definiciones Básicas**]: Sean A y B conjuntos, se define:
  - *Igualdad:* $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
  - *Inclusión:* $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$
  - *Unión:* $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
  - *Intersección:* $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
  - *Complemento:* $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$
  - *Diferencia:* $A \setminus B := A \cap B^c$
  - *Diferencia simétrica:* $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- [**Propiedades de inclusión**]: Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos:
  a) $\emptyset \subseteq A \subseteq E$
  b) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
  c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$
- [**Propiedades de igualdad**]: Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos:
  a) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
  b) $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$
  c) $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$
  d) *Ley de De Morgan*
     - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
     - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- [**Equivalencias útiles**]: Son equivalentes:
  i) $A \subseteq B$
  ii) $B^c \subseteq A^c$
  iii) $A \cap B^c = \emptyset$
  iv) $B \cup A^c = E$

P1. ***[MÓDULO COMÚN]Pisando terrreno***

Sean A, B y C tres conjuntos. En la columna de la izquierda de la tabla que se muestra a continuación, se enuncian propiedades de pertenencia en lenguaje corriente. Complete, en la columna de la derecha, la propiedad correspondiente escrita en notación conjuntista, escribiendo una expresión de la forma "$x \in D''$, donde D es lo que debe determinar. Se escribe la primera como ejemplo.

En lenguaje corriente	Notación conjuntista
x no pertenece a A	$x \in A^c$
x pertenece a C o a B	
x pertenece a A pero no a C	
x pertenece a los tres conjuntos	
x pertenece a alguno de los conjuntos	
x no pertenece a ninguno de los tres conjuntos	
x no pertenece a A pero sí a alguno de los otros	
x pertenece a lo más a uno de los conjuntos	
x pertenece exactamente a dos conjuntos	

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. ***[MÓDULO PROPIO]Inclusión de conjuntos***

Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos. Demuestre que:

a) $A \cap B \subset C \Rightarrow A \cap C^c \subseteq B^c$

b) $(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup (D \cap A)$

c) **Propuesto:** $(A \cap D) \subseteq (B \cap D) \wedge (A \cap D^c) \subseteq (B \cap D^c) \Longrightarrow A \subseteq B$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. ***[MÓDULO PROPIO]Igualdad de conjuntos***

Sean $A, B, C, \subseteq E$ conjuntos. Demuestre que:

1. $A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
2. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3. **Propuesto:** $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus (B \cup (C \setminus A))$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

PROPUESTOS:

P4. (**Propuesto:**) ***[MÓDULO COMÚN]Imaginación***
Sean A, B y C tres conjuntos. Analice el valor de verdad de las siguientes igualdades. Las que sean verdaderas, demuéstrelas y para las que sean falsas, entregue un contraejemplo.

a) $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$.
b) $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

a) Intuición:
b) Teoría:
c) Matraca:

P5. (**Propuesto:**) ***[MÓDULO COMÚN]Clásico controles***
Sean A y B dos conjuntos.

a) Demuestre que
$$A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A.$$
b) Encuentre un conjunto X que verifique las siguientes igualdades:
$$A \cup X = A \cup B \ \wedge \ A \cap X = \emptyset.$$
c) ¿Existe un único conjunto X que satisface las igualdades precedentes?

P6. (**Propuesto:**) ***Conjunto de conjuntos***
Sea $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F}_A$ por:
$$\mathcal{F}_A = \{X \subseteq E \mid X \cap A \neq \emptyset\}$$
Demuestre que dado $B \subseteq E$:

a) $E \in \mathcal{F}_A \ \wedge \ A \in \mathcal{F}_A$
b) $A \setminus B \neq \emptyset \Longrightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$
c) $B \in \mathcal{F}_A \ \wedge \ C \subseteq E \Longrightarrow B \cup C$
d) Si $A \subseteq B \cap C$, verifique que $B \in \mathcal{F}_A$ y $C \in \mathcal{F}_A$ pero $B \triangle C \notin \mathcal{F}_A$