MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesor: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 02: Inducción y recurrencias

24 de Abril 2020

Resumen

- [**Principio de inducción**]: Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una función proposicional, se tiene que la proposición:

$$\forall n \geq n_0, P(n) \tag{1}$$

Es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{Caso\ base} \ \wedge \ [\forall n \geq n_0, \ \underbrace{P(n)}_{H.I.\ (débil)} \ \Rightarrow P(n+1)]$$

Observación: Este tipo de inducción también es conocida como inducción débil.

- [**Principio de inducción Fuerte**]: También tenemos que la proposición (1) es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{Caso\ base} \ \wedge \ [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n)}_{H.I.\ (fuerte)} \Rightarrow P(n+1)]$$

Esta inducción es llamada inducción fuerte pues ocupa completamente la hipótesis inductiva.

P1. ***Igualdad, divisibilidad y desigualdades[PROPIO SECCIÓN]***

1. Demuestre que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$
2. Demuestre que si $n \geq 1$ es un natural, entonces $13^n - 6^n$ es divisible por 7.
3. Pruebe que $3^n > n^2$ para $n = 1$, $n = 2$ y use inducción para probar que para se cumple para todo $n \geq 2$.

a) Intuición:Para este tipo de ejercicios la intuición irá de la mano con que me piden demostrar algo $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto nos da una pista pues al tener los naturales como conjunto de referencia, podremos indexar $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ entonces inducción será nuestra mayor arma.
Antes debemos notar ciertas conductas repetitivas de estos tipos de ejercicios, notemos que tenemos lo siguiente:

1) Igualdad asociada a naturales.
2) Divisibilidad asociada a naturales.
3) Desigualdades asociada a naturales.

Tenemos estos 3 clásicos casos de inducción, con un orden(no en todos) de dificultad, teniendo esto en cuenta lo que debo pensar es en inducción, probar un caso base que no me debería generar tanto problema, luego asumir una hipótesis inductiva(Para un n arbitrario natural) y a partir de eso tomar lo que me piden demostrar, es decir, el caso $n+1$ trabajarlo hasta poder notar donde usar la hipótesis(siempre deben usarla, si no a revisar). Luego de esto, y como ya sabemos como atacar el problema, debemos empezar a desarrollar, pero antes...

b) Teoría: Lo que necesitamos conocer y que respalde el desarrollo que haremos es manejar como funciona el principio de inducción. de quién es mi hipótesis inductiva? y qué es lo que quiero demostrar?Esto es primordial, si no tengo un respaldo justificado de un paso es dudoso el desarrollo, y casi todas las propiedades se extraen de los naturales, así que ojo con aquello.

c) Matraca: La matraca es caso base, contextualizar, hipótesis inductiva y con esto probar mi paso inductivo.(veamos en cada ejercicio, adelante!)

1. [Problema de igualdad asociada a naturales]
Tomar en cuenta que desde donde me piden demostrar, allí podré descubrir el caso base a probar.
Se recomienda antes de comenzar la hipótesis de este ejercicio ver la suma de los naturales(Suma de Gauss) `https://es.wikipedia.org/wiki/1_%2B_2_%2B_3_%2B_4_%2B_%E2%8B%AF` (es un link presiónenlo!). Luego noten que al desarrollar el caso p(n+1) podrán ver a través de la asociatividad que nos entrega la suma en $\mathbb{R}$ en particular en $\mathbb{N}$, podemos ver nuestra hipótesis inductiva, ahora a desarrollar! Si es que no puedes llegar a lo que quieres, prueba hacer la suma de los primeros $(n+1)$ naturales, dónde lo podré usar?
2. [Problema de divisibilidad asociado a naturales]
En general estos problemas son todos muy parecidos, por lo que la práctica hace al maestro/maestra! veamos que el caso base sale directo porque el $0 = 0 \cdot b, \forall b \in \mathbb{N}$
Luego ya con tú hipótesis lista ve como descomponer convenientemente el caso $p(n+1)$ para poder armar tu hipótesis inductiva, si no lo ves natural fuérzala! el resto deberá se lo justo para probar lo requerido.
3.[Problema desigualdad asociado a naturales]
Para este caso puede considerarse uno de los casos más difíciles, pero al igual que los dos anteriores, son fruto de harta práctica. Luego d eprobar los casos $n = 1 \wedge n = 2$ como pide el enunciado, esto nos adelanta el paso del caso base, para la hipótesis inductiva se torna de manera normal.
Para esta parte del desarrollo(paso inductivo) definiremos el concepto de .ªcotar"lo cual se trata de buscar un elemento mayor o menor para lo pedido, por ejemplo $3 \geq 2 \geq 1$ si tengo 1, puedo mayorar 1 por 2 o 2 pues son mayores que el, esto sería acotar superiormente 1.
La recomendación es tomar(por qué no?) $(n+1)^2$ y acotarlo superiormente.

P2. ***Inducción Lógica[PROPIO SECCIÓN]***
Sean $q, p_1, p_2, ...$ proposiciones. Pruebe por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la siguiente proposición es una tautología:

$$[p_n \implies (p_{n-1} \implies (p_{n-2} \implies (\dots (p_1 \implies q))))] \iff [(p_n \wedge p_{n-1} \wedge \cdots p_1) \implies q]$$

a) Intuición:Me píden algo indexado con naturales! INDUCCIÓN

b) Teoría:Tener en conocimiento lo visto en auxilar 1! pues usaremos varias propiedades de lógica de conjunto, además de la teoría de la inducción

c) Matraca: Vamos a lo duro, el caso base será $n = 2$, no les recuerda algo `https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2020/1/MA1101/6/material_docente/o/3033722` ejem p7.b.
Luego de ver esto, notemos que la hipótesis inductiva es un corcho enorme de proposiciones, pero todas operadas con disyunciones o conjunciones, por lo que podremos trabajarlo!
Paso inductivo, podremos notar a través de implicancias bien explícito que se trata de nuestra hipótesis inductiva, pero habrá que ordenar convenientemente para poder llegar a $p(n+1)$(Recordar que la Ley de De Morgan cumple para una cantidad finita de proposiciones, se cumple! a jugársela!)

P3. ***[MÓDULO COMÚN]***
Sea $P(n)$ un predicado con conjunto de referencia $\mathbb{N}$. demuestre que:

1. $\exists n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(1)) \vee \overline{P(1)}$
3. ¿Se cumple $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$?

a) Intuición: Tener recuerdo de lógica proposicional, y no solo usar inducción cuando dice natural, si no fijarse ahora en los cuantificadores.

b) Teoría:¿Qué ocurre con las proposiciones que no dependen del conjunto de referencia, en este caso lo que muestra la página 19 del apunte. ¿Cómo me es conveniente probar una existencia?¿Y un Para todo?

c) Matraca: 1.Nos pide justificar una existencia, si lo encuentro gané!
2.Dado que es una implicancia, podría estudiar un caso problemático de las implicancias para poder concluir algo (también se puede por inspección)
3.Notemos que $p(0) \wedge p(1)$ no tienen dependencia de n por loq ue se deberá estudiar el caso $n = 0, n = 1$ por separado y luego un caso $n \geq 2$ (Acabo de spoilear que se atacará por casos)
Ahora debes ver que son puras disyunciones, por lo que será Falso todo para un caso y Verdad todo para más casos, estudia todos los casos!

P4. ***[MÓDULO COMÚN]***
Demuestre las siguientes proposiciones.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)(n+3)$ es divisible por 24
3. $(\forall n \in \mathbb{N}, a^{2^n} - 1$ es múltiplo de $2^{n+1}) \Leftrightarrow a$ es impar

a) Intuición: Ejercicios de divisibilidad asociada a naturales! nos adelantemos! a trabajar

b) Teoría:Vista en P1

c) Matraca:Recomiendo probar por inducción que el producto de 2 naturales consecutivos es un número par, pues lo necesitaran.
Recordar que la suma distribuye sobre el producto como están viendo en cálculo!
Con esto les debería salir 1. y 2. (En 2. usen 1.[Aunque no lo hayan probado pueden decir: Asumiendo 1.])
Para 3. Veamos que es una equivalencia por lo que habrá que probar ambas implicancias, para una necesitaremos inducción y para la otra razonar con la implicancia interesante para poder avanzar, notemos también que todo numero impar a es impar $\Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{N} a = 2k+1 \vee a = 2l-1$ [Se escribe como un par menos o más 1].
Por último propiedades de potencia ayudaran y justificar debidamente con la cerradura de conjuntos.

P5. ***[MÓDULO COMÚN]***
Sea p una proposición y sea p_n una proposición equivalente a $\overline{p_{n-1}} \vee p \Rightarrow p_{n-1}$, para $n \geq 1$, y a $\overline{p}$, para $n = 0$.
Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \Leftrightarrow \overline{p}$

a) Intuición:Son proposiciones lógicas indexadas con naturales!

b) Teoría: Auxiliar 01+02

c) Matraca:Nos pide justificar una equivalencia por lo que intentaremos trabajar con puras equivalencias!
Notemos que hipótesis inductiva ($P_n \Leftrightarrow \overline{p}$) y por otra parte lo que debo probar ($P_{n+1} \Leftrightarrow \overline{p}$) donde nos será útil ver que hipótesi me entrega el enunciado y recordar las propiedades de lógica proposicional.

Propuesto de pana

P6. ***Famosa Recurrencia[PROPIO SECCIÓN]***
Hay muchas propiedades acerca de los números de Fibonacci que se pueden probar por inducción. Recordemos que los números de Fibonacci son definidos por la recurrencia:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = f_2 = 1$$
$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Demostraremos algunas de las muchas propiedades de estos números:

a) Demuestre que $f_n < 2^n$

b) Demuestre que $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

c) Demuestre que si definimos $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, entonces $f_n = \dfrac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P7. ***[MÓDULO COMÚN]***

1. Sea $a \in \mathbb{N}$ y l_n definida por la recurrencia $l_0 = 2$ y $\forall n \in \mathbb{N}, l_{n+1} = al_n + (1-a)$
   Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = a^n + 1$
2. Sea $a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2, f_1 = 2a$y $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$.
   Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq a^n + b^n$

a) Intuición:Me están definiendo una recurrencia, que depende de naturales! INDUCCIÓN finalmente inducción final.

b) Teoría:Saber que el término n-ésimo de mi recurrencia dependerá de como me lo defina el enunciado y más importante de los términos anteriores

c) Matraca: Expresemos lo que queremos demostrar y a atacar con las hipótesis del enunciado o inductiva que tenemos a mano.
2.Lo anterior fue para 1. jejej , luego 2. Nos entrega mucha información así que intentemos ordenar toda esta información.
Luego es importante notar que nos definen el término f_{n+2}, pero a este se le permiten traslaciones mientras $n \geq 2$, entonces podemos decir que para algún $n \in \mathbb{N}$ arbitrario!$f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$ es equivalente a $f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}$
Por otra parte notar donde vive cada $f_k, \forall k \in \mathbb{N}$[Argumentar por cerradura].
Una vez con estos pasos recomiendo ir a atacar el paso inductivo, y tomar el lado de donde tengo más información y acotarlo convenientemente

"No tengo frase, pero que les vaya bacan!"
Pato

Pauta Auxiliar 2.

P1) intuición
teoría
motivación

1\. Demuestre que $1^3+2^3+ \_\_\_\_ m^3 = (1+2+ \_\_\_ m)^2$
$(\forall m \in \mathbb{N})(m \geq 1)$

Probaremos por Principio de inducción.

Caso base $m=1 \iff 1^3 = 1^2$ ✓

Hipótesis inductiva $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $1^3+2^3+ \_\_\_ m^3 = (1+2+3 \_\_\_ m)^2$

Paso inductivo PDQ $m+1$ lo cumple

PDQ: $(1^3+2^3+ \_\_\_\_ m^3+(m+1)^3) = (1+2+3 \_\_\_ m+(m+1))^2$

Tomaremos (como es viernes) el lado izquierdo de la igualdad y llegaremos al derecho, pero antes veremos un recordatorio

Suma Gauss $\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2} = 1+2+ \_\_\_ m$

Cómo se deduce

$1+2+3+ \_\_\_\_ (m-3)+(m-2)+(m-1)+m$

$= m+1+(m-1)+2+(m-2)+3+ \_\_\_\_$ } m sumandos

$= (m+1)+(m+1)+(m+1)+ \_\_\_\_$ } m/2 sumandos

$= \frac{m(m+1)}{2}$ // $\in \mathbb{N}$, pues si m par m+1 impar y viceversa

2

Volvamos al ejercicio

$(1^3 + 2^3 + \_\_\_\_ + m^3 + (m+1)^3)$ H.I.

$= (1 + 2 + 3 \_\_\_\_ + m)^2 + (m+1)^3$ *

*

$= \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3$

$= \frac{(m+1)^2}{2^2}\left[m^2 + 4(m+1)\right]$

$= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{(m+1)((m+1)+1)}{2}\right)^2$

*

$= (1 + 2 + 3 \_\_\_\_ (m) + (m+1))^2$ $\square$

Luego por principio de inducción probamos lo pedido

2) PDQ $\forall n \geq 1$, con $n \in \mathbb{N}$, $7 \mid 13^n - 6^n$ (3)

Notemos que este tipo de problemas tiene una pillería, con el desarrollo algebraico habitual y son para práctica!
Podemos ver que $13-6=7$ ¿será coincidencia? ¡No lo creo!

Lo probaremos por inducción

Caso base $n=1$ $13^1-6^1=7 \mid 7$

Hipótesis: $\exists k \in \mathbb{N}$, $7k = 13^n - 6^n$, para algún n.

Caso inductivo $\exists \bar{k} \in \mathbb{N}$, $7\bar{k} = 13^{(n+1)} - 6^{(n+1)}$

tenemos 2 formas equivalentes

forma 1

Usando $13=6+7$

$13^{n+1} - 6^{n+1}$

$= 13^n \cdot 13 - 6^n \cdot 6$

$= 13^n(6+7) - 6^n \cdot 6$

$= 6(13^n - 6^n) + 7 \cdot 13^n$ $\downarrow$ HI

$= 7k + 7 \cdot 13^n$

$= 7 \cdot \underbrace{(k+13^n)}_{\bar{k} \in \mathbb{N}}$

forma 2. Usaremos un 0 conveniente, ni quita ni pone, ni pone ni saca.

$13^{n+1} - 6^{n+1} + 0$

$= 13^{n+1} - 6^{n+1} + 6^n \cdot 13 - 6^n \cdot 13$

$= 13(13^n - 6^n) - 6^n(13-6)$

$= 13 \cdot 7\bar{\bar{k}} - 6^n \cdot 7$; $\bar{\bar{k}} \in \mathbb{N}$

$= 7\underbrace{(13\bar{k} - 6^n)}_{\bar{k} \in \mathbb{N}}$

Luego se proba lo pedido, a través de principio de inducción.

3. PDG. $3^n > n^2 \quad \forall n \geq 1$

lo probaremos por principio de inducción.

[VIDEO] suscribase comente deje su like

$n = 1 \qquad 3^1 > 1^2$ ✓

$n = 2 \qquad 3^2 > 2^2$ ✓

} Enunciado pedía ver compañito estos casos

PDG.

$\forall n \geq 2$ (Enunciado)

Caso base:

$n = 2$ fue probado

hipótesis inductiva $\quad 3^n \geq n^2$ Para algún $n \geq 2$.

paso inductivo tomamos el elemento de la Izq. $(n+1)^2$

PDG $3^{n+1} > (n+1)^2$

Por qué? mi idea es encontrar elementos que sobre pasen a $(n+1)^2$ con la H.I. y probar lo dicho.

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ — fácil de eliminar

HI $n^2 < 3^n$

$\underbrace{n \leq n^2 < 3^n}_{\text{propuesto}}, \forall n \geq 2$

Estamos en enteros.

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n^2 + 1$

$\Rightarrow \leq n^2 + 2n^2 = 3n^2 < 3^n \cdot 3 = 3^{n+1}$ $\boxed{\checkmark}$

$\therefore$ Probamos lo dicho

P2) PDG **[VIDEO]** (5)

$[p_n \Rightarrow (p_{n-1}) \Rightarrow (\dots (p_1 \Rightarrow q))) \_)] \Leftrightarrow [p_1 \wedge p_2 \wedge \_ \wedge p_n) \Rightarrow q$

Caso base

$n = 2$

$[p_2 \Rightarrow p_1 \Rightarrow q] \Rightarrow [(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow q]$ Pf. 6 Aux 01

Hipótesis inductiva Para algún n

$[p_n \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow (\_\_\_ (p_1 \Rightarrow q)) \_] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \_ p_n) \Rightarrow q]$

tomamos el lado que más información de y a través de equivalencias debo llegar a lo pedido

PDG:

$[p_{n+1} \Rightarrow (p_n \Rightarrow (\_\_\_ (p_1 \Rightarrow q))) \_] \Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \_\_\_ p_n \wedge p_{n+1}) \Rightarrow q]$

$\Leftrightarrow [p_{n+1} \Rightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \_\_\_ p_n \Rightarrow q))]$ $\downarrow$ Carac $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow [\overline{p_{n+1}} \vee ((p_1 \wedge p_2 \wedge \_\_\_ p_n) \Rightarrow q))]$ $\downarrow$ Carac $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow [\overline{p_{n+1}} \vee (\overline{(p_1 \wedge p_2 \wedge \_\_\_ p_n)} \vee q)]$ $\downarrow$ Ley de De Morgan

$\Leftrightarrow [\overline{(p_{n+1} \wedge p_1 \wedge p_2 \_\_\_ p_n)} \vee q]$ $\downarrow$ Conmutatividad

$\Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \_\_\_ p_n \wedge p_{n+1}) \Rightarrow q]$ $\downarrow$ Carac $\Rightarrow$ $\blacksquare$

[Módulo 10 min] 6

Sea $P(n)$ un predicado.

1. $\exists n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n)) \Rightarrow P(1) \vee \overline{P(1)}$
3. Se cumple $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee (\overline{P(1)})$

1. Para este caso notemos que nos piden demostrar una existencia, entonces tenemos que ver quien es el buen elemento, luego $P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$; recordemos $V \vee q \Leftrightarrow V$ dominancia, $q \vee \bar{q} \Leftrightarrow V$ Tercio excluso, además. Ahora podemos decir que como es una existencia

$n = 1 \Leftrightarrow P(1) \vee P(0) \vee (\overline{P(1)})$ luego Asoc/conmutatividad
$\Leftrightarrow P(1) \vee (\overline{P(1)}) \vee P(0)$. Tercio excluso
$\Leftrightarrow V \vee P(0)$ Dominancia
$\Leftrightarrow V$

Con esto probamos lo pedido. //

2. $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n)) \Rightarrow (P(1)) \vee (\overline{P(1)})$
Tenemos que tener en cuenta que tenemos 2 formas de resolver esto

- Inspección
- Contradicción.

Inspección: Supongamos que $P(1) \Leftrightarrow V$ esto aterrizado en nuestro problema $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow V) \vee F$
$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \overline{P(n)} \vee V) \vee F$
$\Leftrightarrow V \vee F \Leftrightarrow V$

Luego por dominancia de la disjunción, toda la proposición es V. + caraC $\Rightarrow$

• Supongamos $P(1) \Leftrightarrow F$ luego esto contextualizado en nuestro problema $(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(1)) \vee (\overline{P(1)})$

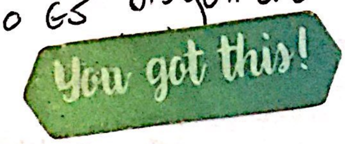
$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow F) \vee V$$
$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{P(n)}) \vee V$$
$$\Leftrightarrow V$$

Luego por dominancia de la disyunción, toda la proposición es V + caraC $\Rightarrow$

• Por esto podemos concluir que toda la expresión es verdadera independiente del valor de verdad de $(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P)$ → cualquiera

Contradicción: Asumamos que $[(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(1)) \vee (\overline{P(1)})] \Leftrightarrow F$

luego como es disyunción cada lado debe ser



Falso

$a \vee b \Leftrightarrow F$
$\Leftrightarrow a \Leftrightarrow F$
$\wedge\ b \Leftrightarrow F$

$$\Leftrightarrow \overline{P(1)} \Leftrightarrow F$$
$$\Leftrightarrow P(1) \Leftrightarrow V$$

Luego reemplazando en $(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow (P(1)))$ (porque la $\wedge$)

$(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow V) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (\overline{P(n)} \vee V) \xrightarrow{\text{dominancia}} \Leftrightarrow V$

luego Explotan gatos!

Asumimos $(\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow (P(1))) \Leftrightarrow F$ y llegamos a que es V por lo que es una contradicción y nuestra hipótesis (TODO $\Leftrightarrow F$) era falsa y es V, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxtimes$

3. ¿Se cumple $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$? || Debía escribir con azul :c

P

- Podemos ver que nos pide ver el valor de verdad

Veamos los casos iniciales si $n = 0 \Leftrightarrow P(0) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$ entonces basta que $P(0)$ sea V o $P(1)$ sea F y todo es V

- Luego si $n = 1 \Leftrightarrow P(1) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$ por tercio excluso todo es V

- Luego $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ depende del valor de verdad de $P(n)$ pues si $P(n) \Leftrightarrow V$ todo es V

- Luego si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ es F o bien no se sabe depende de el valor de verdad de $P(1)$ y $\overline{P(1)}$

- El caso donde todo es Falso es si $P(n) \Leftrightarrow F$ $\wedge\ P(0) \Leftrightarrow F \wedge \overline{P(1)} \Leftrightarrow F$
$\Leftrightarrow P(1) \Leftrightarrow V$.

Con esto acaba el estudio de la proposición compuesta.

9

P4 Demuestre

1. $\forall m \in \mathbb{N}$, $m(m+1)(m+2)$ es múltiplo de 6

$\Leftrightarrow$ $m(m+1)(m+2) \equiv 0 \pmod 6$ [$m(m+1)(m+2)$ es congruente a 0 en módulo 6; que equivale a que $m(m+1)(m+2) - 0 = 6k$, $k \in \mathbb{N}$]

Probemos por inducción

Caso base $m = 0$

$0 = 6K$, $K \in \mathbb{N}$, $K = 0 \in \mathbb{N}$ ✓

Notacion para el futuro

Hipótesis inductiva: Asumimos que para algún $m \in \mathbb{N}$ se cumple $m(m+1)(m+2) = 6 \cdot j$; $j \in \mathbb{N}$

Paso inductivo $P(m) \Rightarrow P(m+1)$

$m(m+1)(m+2) = 6j \Rightarrow (m+1)((m+1)+1)((m+1)+2) = 6\tilde{k}$; $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ ← número

$\Rightarrow (m+1)(m+2)(m+3) = (m+1)(m+2) \cdot m + (m+1)(m+2) \cdot 3$ / distributividad

$= 6j + (m+1)(m+2) \cdot 3$; $j \in \mathbb{N}$ arbitrario cualquiera

$= 6 \cdot j + 2 \cdot m \cdot 3$; $m \in \mathbb{N}$ $(m+1)(m+2)$ SPG alguno será par y el producto será par. (LUCIA) Propiedad

$= 6 \cdot j + 6m = 6(\underbrace{j + m}_{\in \mathbb{N}})$

cerradura en $\mathbb{N}$ para (+)

Con esto con principio de induccion probamos $m(m+1)(m+2) = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, algún k.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3) \equiv 0 \pmod{24}$ 10

es múltiplo para algún $k \in \mathbb{N}$

↓ recordem que las variables son mudos.

Caso base: $n=0 \Leftrightarrow 0 \equiv 24k$, $k \in \mathbb{N}$, $k=0$

Hipótesis inductiva algún $j \in \mathbb{N}$ cumple $n(n+1)(n+2)(n+3) \equiv 24 \cdot j$, $j \in \mathbb{N}$

Paso inductivo $P(j) \Rightarrow P(j+1)$

$$(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)\cdot((n+1)+3)$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \underbrace{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot n}_{\substack{24\cdot j \\ \text{Hipótesis } ; j\in\mathbb{N}}} + (n+1)(n+2)(n+3)\cdot 4$$

$$+ 4\cdot \underbrace{(n+1)(n+2)(n+3)}_{\substack{P4.1 \\ = 6\cdot m,\ m\in\mathbb{N}}}$$

$$= 24j + 24\cdot m = 24\underbrace{(j+m)}_{\in\mathbb{N} \text{ cerradura.}}$$

luego por inducción probamos lo pedido.

3) ($\forall m \in \mathbb{N}, a^{2^m} - 1$ es múltiplo de 2^{m+1}) $\Leftrightarrow$ a impar

Podemos notar que se trata de una equivalencia por lo que hay que probar 2 implicancias

$\Leftarrow$) Si a es impar $\Leftrightarrow$ $a = 2 \cdot j + 1$; $j \in \mathbb{N}$

• Luego PDQ ($\forall m \in \mathbb{N}, a^{2^m} - 1$ es múltiplo de 2^{m+1}

Caso base $m = 0$ $\Leftrightarrow$

$$a^{2^0} - 1 = a^1 - 1 = a - 1 \text{ ; pero}$$
$$= 2 \cdot j + 1 - 1 = 2 \cdot j \text{ ; } j \in \mathbb{N}$$

Hipótesis inductiva. Para algún $m \in \mathbb{N}$ $a^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$

$a^{2^m} = 2^{m+1} \cdot m + 1$

Paso inductivo $P(m) \Rightarrow P(m+1)$

$$a^{2^{m+1}} - 1 = a^{2^m \cdot 2} - 1 = (a^{2^m})^2 - 1$$

$\downarrow$ Hipótesis

$$= (2^{m+1} \cdot m + 1)^2 - 1$$

$$= (2^{m+1} \cdot m)^2 + 2^{m+2} \cdot m + \cancel{1} - \cancel{1}$$

$$a^{2^{m+1}} - 1 = 2^{m+2} \underbrace{(2^m \cdot m^2 + m)}_{k \in \mathbb{N}\text{, cerradura de operaciones en } \mathbb{N}}$$

$$= 2^{m+2} \cdot k \text{ ; } k \in \mathbb{N}$$

luego $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ $\Leftrightarrow$ $a^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot l$; $l \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a^{2^{m+1}} - 1 = 2^{m+2} \cdot l'$; $l' \in \mathbb{N}$

Por inducción se tiene $\Leftarrow$)

$\Rightarrow$) Contradicción supongamos que $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

luego $a^{2^m} - 1 = (2k)^{2^m} - 1 = 2^{2^m} \cdot k^{2^m} - 1 = \underbrace{2 \cdot (2^{2^m - 1}) - 1}_{\text{Impar}}$

$= 2^{m+1}$ Par

Por lo que debe ser Impar, luego por $\Rightarrow \wedge \Leftarrow$ se tiene $\Leftrightarrow$ ∎

12

P5| 1. Sea p_m una proposición y sea p_m una proposición equivalente a $\overline{p_{m-1}} \vee p \Rightarrow p_{m-1}$; para $m \geq 1$ y a $\bar{p}$ para $m = 0$

PDQ: $\forall m \in \mathbb{N}, p_m \Leftrightarrow \bar{p}$; Nos pide justificar esta equivalencia $\forall m \in \mathbb{N}$, por lo que analizamos $m=0 \wedge m \geq 1$

Si $m \geq 1$ $m=0$ # propuesto por P_1 complet

$p_m \Leftrightarrow \overline{p_{m-1}} \vee p \Rightarrow p_{m-1} \wedge p_m \Leftrightarrow \bar{p}$

Lo probaremos por inducción pues es $\forall m \in \mathbb{N}$

Caso base: $m=0$. se tiene $p_m \Leftrightarrow \bar{p}$ por enunciado ✓

Hipótesis inductiva: Para algún m $p_m \Leftrightarrow \bar{p}$

Paso inductivo: PDQ $p_{m+1} \Leftrightarrow \bar{p}$

Enunciado $\Leftrightarrow \overline{p_m} \vee p \Rightarrow p_m$

Hipótesis inductiva $\Leftrightarrow \bar{\bar{p}} \vee p \Rightarrow \bar{p}$

Carac $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow p \Rightarrow \bar{p}$

Idempotencia $\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{p}$

$\Leftrightarrow \bar{p}$

luego por inducción se tiene.

P7| 1. Sea $a \in \mathbb{N}$, y l_m definida por la recurrencia $l_0 = 2$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $l_{m+1} = a\, l_m + (1-a)$ * hipótesis de enunciado

Demuestre $\forall m \in \mathbb{N}$, $l_m = a^m + 1$

Por inducción

Caso base: $m=0$ $l_0 = 2 \overset{?}{=} a^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ ✓ ; $a \in \mathbb{N}$

Hipótesis inductiva: Para algún m $l_m = a^m + 1$

Paso inductivo: $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ $l_{m+1} = a^{m+1} + 1$; $l_{m+1} \overset{*}{=} a\, l_m + (1-a) \overset{\text{hipótesis inductiva}}{=} a(a^m+1)+(1-a)$

luego $a(a^m+1)+(1-a) = a^{m+1} \cancel{+a} + 1 \cancel{-a} = a^{m+1}$ //

luego por principio inducción se tiene ■

2 Sea a, b, $a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia

(1) $f_0 = 2$ (*) $a \geq b$

(2) $f_1 = 2a$

(3) $f_{n+2} = a f_{n+1} + b f_n$

PDQ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq a^n + b^n$

Como $f_{n+2} = a f_{n+1} + b f_n$ está definido recursivamente a través de sumas y productos de naturales, tenemos cerradura para naturales $\Rightarrow a f_{n+1} \geq 0 \wedge b f_n \geq 0$ (!)

. Ahora probaremos por inducción

Caso base: $f_0 = 2 \overset{?}{\geq} a^0 + b^0 = 2$ ✓

$f_1 = 2a \geq a^1 + b^1$ En efecto $a \geq b$ $/+a$

$2a \geq a+b$ ✓

Hipótesis inductiva: $f_n \geq a^n + b^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Paso inductivo PDQ $f_{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$, $n \geq 2$.

$f_{n+1} \overset{(3)}{=} a f_n + b f_{n-1} \geq a(a^n + b^n) + \underbrace{b f_{n-1}}_{\geq 0}$ (!)

$\geq a(a^n + b^n)$ Es ≥ 0 por cerradura de $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

$= a^{n+1} + ab^n$ sabemos que $a \geq b$ $/ \cdot b^n$

$\geq a^{n+1} + b^{n+1}$ $\boxed{ab^n \geq b^{n+1}}$

■

Donde probamos lo pedido.

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl