

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño

Profesor: Paulina Cecchi B.

Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 02: Inducción y recurrencias

24 de Abril 2020

Resumen

- **[Principio de inducción]:** Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una función proposicional, se tiene que la proposición:

$$\forall n \geq n_0, P(n) \quad (1)$$

Es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\text{Caso base}} \wedge [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n)}_{\text{H.I. (débil)}} \Rightarrow P(n+1)]$$

Observación: Este tipo de inducción también es conocida como inducción débil.

- **[Principio de inducción Fuerte]:** También tenemos que la proposición (1) es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\text{Caso base}} \wedge [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n)}_{\text{H.I. (fuerte)}} \Rightarrow P(n+1)]$$

Esta inducción es llamada inducción fuerte pues ocupa completamente la hipótesis inductiva.

P1. Igualdad, divisibilidad y desigualdades[PROPIO SECCIÓN]

1. Demuestre que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$
2. Demuestre que si $n \geq 1$ es un natural, entonces $13^n - 6^n$ es divisible por 7.
3. Pruebe que $3^n > n^2$ para $n = 1$, $n = 2$ y use inducción para probar que para se cumple para todo $n \geq 2$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Inducción Lógica[PROPIO SECCIÓN]Sean $q, p_1, p_2, \dots$ proposiciones. Pruebe por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la siguiente proposición es una tautología:

$$[p_n \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow (p_{n-2} \Rightarrow (\dots (p_1 \Rightarrow q))))] \iff [(p_n \wedge p_{n-1} \wedge \dots \wedge p_1) \Rightarrow q]$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. [MÓDULO COMÚN]

Sea $P(n)$ un predicado con conjunto de referencia $\mathbb{N}$. demuestre que:

1. $\exists n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(1)) \vee \overline{P(1)}$
3. ¿Se cumple $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$?

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P4. [MÓDULO COMÚN]

Demuestre las siguientes proposiciones.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)(n+3)$ es divisible por 24
3. $(\forall n \in \mathbb{N}, a^{2^n} - 1 \text{ es múltiplo de } 2^{n+1}) \Leftrightarrow a \text{ es impar}$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P5. [MÓDULO COMÚN]

Sea p una proposición y sea p_n una proposición equivalente a $\overline{p_{n-1}} \vee p \Rightarrow p_{n-1}$, para $n \geq 1$, y a $\overline{p}$, para $n = 0$.

Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \Leftrightarrow \overline{p}$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P6. Famosa Recurrencia/[PROPIO SECCIÓN]

Hay muchas propiedades acerca de los números de Fibonacci que se pueden probar por inducción. Recordemos que los números de Fibonacci son definidos por la recurrencia:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = f_2 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Demostraremos algunas de las muchas propiedades de estos números:

- a) Demuestre que $f_n < 2^n$
- b) Demuestre que $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$
- c) Demuestre que si definimos $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\overline{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, entonces $f_n = \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P7. [MÓDULO COMÚN]

1. Sea $a \in \mathbb{N}$ y l_n definida por la recurrencia $l_0 = 2$ y $\forall n \in \mathbb{N}, l_{n+1} = al_n + (1 - a)$
Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = a^n + 1$
2. Sea $a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2, f_1 = 2a$ y $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$.
Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq a^n + b^n$
 - a) Intuición:
 - b) Teoría:
 - c) Matraca:

“No tengo frase, pero que les vaya bacan!”

Pato