MA1101-1 y 6 Introducción al Álgebra
Profesores: Martín Matamala y Leonardo Sánchez
Auxiliar: Matías Azócar y Marcelo Navarro

Guía 1: Relaciones

6 de Mayo del 2018

P1.- (P1 Control 3, Año 2008)

a) Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por:

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff xy>0$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Calcule el conjunto cuociente $(\mathbb{R}\setminus\{0\})/\mathcal{R}$.

b) Sea E un conjunto no vacío y considere $k\in\mathcal{P}(E)$ fijo, con $K\neq\phi$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:

$$A\,\mathcal{R}_K\,B \iff B\cap K\subseteq A.$$

1) Pruebe que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.
2) Proponga un conjunto $K\in\mathcal{P}(E)$ de modo que $\mathcal{R}_K$ sea una relación de **orden**. Justifique.

P2.- (P3 Control 2, Año 2006)

a) Sea E un conjunto y $A\neq\phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$X\,\mathcal{R}\,Y \iff A\cap X=A\cap Y$$

a.1) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
a.2) Demuestre que el conjunto cuociente $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}=\{[X]\mid X\in\mathcal{P}(A)\}$.
a.3) Demuestre que para $X,Y\in\mathcal{P}(A)$ se tiene que $X\neq Y \Rightarrow [X]\neq[Y]$.

b) Sea $f:A\longrightarrow B$ una función y τ una relación de orden en B. Se define la relación Ω en A como $x\,\Omega\,y \Leftrightarrow f(x)\,\tau\,f(y)$. Demuestre que Ω es relación de orden en A, si y sólo si, f es inyectiva.

P3.- (P2 Control 2, Año 1997)
Sea $\mathcal{Q}$ una relación en $\mathbb{R}$. Se define el conjunto $A=\{f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}\mid f \text{ es función}\}$.
Además definimos la relación $\mathcal{R}$ en A por:

$$f\,\mathcal{R}\,g \iff (\exists\, n\geq 0)\,(\forall\, k\in\{0,\dots,n\})\; f(k)\,\mathcal{Q}\,g(k)$$

a) Pruebe que $f\,\mathcal{R}\,g \iff f(0)\,\mathcal{Q}\,g(0)$.

b) Probar que si $\mathcal{R}$ es una relación de orden, entonces $\mathcal{Q}$ es una relación de orden.

c) Probar que si $\mathcal{Q}$ es una relación de equivalencia, entonces $\mathcal{R}$ es también una relación de equivalencia. Además pruebe que la función $\varphi:A/\mathcal{R}\longrightarrow\mathbb{R}/\mathcal{Q}$ que asocia a cada clase de equivalencia $[f]_{\mathcal{R}}$ la clase de $f(0)$ con respecto a $\mathcal{Q}$, es decir, $\varphi([f]_{\mathcal{R}})=[f(0)]_{\mathcal{Q}}$, es una inyección.

P4.- (P3 Control 2, Año 1998)
Sea A un conjunto no vacío y $f:A\longrightarrow A$ una función biyectiva. Denotaremos por f^{-1} a la inversa de f. Para $n\geq 1$ definimos $f^{(n)}$ como la composición de f con ella misma n veces y si $n<0$ definimos $f^{(n)}=(f^{-1})^{(|n|)}$. Si $n=0$, ponemos $f^{(0)}=\mathrm{Id}_A$.
Considere la relación en A definida como:

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff (\exists\, n\in\mathbb{Z})\; f^{(n)}(x)=y$$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Considere $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ fijo. Si $A=\mathbb{Q}$ y $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$. Se define por $f(p)=p\cdot q$, calcular la clase de equivalencia de 0 y de 1 con respecto a $\mathcal{R}$.

P5.- (P1 Control 2, Año 1999)
Considere el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:

$$(a_1, a_2)\, \mathcal{R}\, (b_1, b_2) \iff a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \text{ para un cierto } k \in \mathbb{Z}$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Calcular explícitamente $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$.

c) Pruebe que $A = [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$.

d) **[Propuesto, es media difícil]** Pruebe que existe una biyección $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \longrightarrow [(0,0)]_{\mathcal{R}}$.

P6.- (P2 (i) Control 2, Año 1999)
Considere una relación de orden $\mathcal{R}$ definida sobre el conjunto E. Definimos una nueva relación $\mathcal{R}^*$ en $E \times E$ por:

$$(a, b)\, \mathcal{R}^*\, (c, d) \iff (a \neq c \wedge a\, \mathcal{R}\, c) \vee (a = c \wedge b\, \mathcal{R}\, d)$$

Pruebe que $\mathcal{R}^*$ es una relación de orden.

P7.- (P2 Control 2, Año 2002)
Sean los conjuntos:

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ tal que } (\forall\, i \in \mathbb{N})\, |f(i+1) - f(i)| = 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \text{ tal que } f(0) = 0\}$$

Se definen en $\mathcal{F}$ las relaciones $\leq$ y $\sim$ que siguen:

$$f \leq g \iff (\forall\, i \in \mathbb{N})\, f(i) \leq g(i)$$
$$f \sim g \iff (\exists\, k \in \mathbb{Z})\, (\forall\, i \in \mathbb{N})\, f(i) - g(i) = k$$

a) Demuestre que la relación $\sim$ es de equivalencia.

b) Demuestre que $(\forall\, f \in \mathcal{F})\, (\exists\, g \in \mathcal{F}_0)\, f \sim g$.

c) Demuestre que existe $h \in \mathcal{F}_0$ tal que $(\forall\, f \in \mathcal{F}_0)\, h \leq f$.

d) Sean f, $g \in \mathcal{F}_0$ arbitrarios. Demuestre que:

$$(\forall\, i \in \mathbb{N})\, (\exists\, k \in \mathbb{Z})\, f(i) - g(i) = 2k.$$

P8.- (P1 (a) Control 2, Año 2003)
Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en $\mathbb{R}$. Sobre A definamos la relación binaria Ω siguiente:
Sean $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \in A$, entonces

$$\mathcal{R}_1\, \Omega\, \mathcal{R}_2 \iff [(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\, (x\, \mathcal{R}_1\, y \Rightarrow x\, \mathcal{R}_2\, y)]$$

Pruebe que Ω es de orden parcial en A. (Esto es, demuestre que es una relación de orden sobre A)

P9.- (P3 (i),(ii) Control 2, Año 2004)
Sea $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 2$. Se define en $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ la relación Ω_p por:

$$x\, \Omega_p\, y \iff (\exists\, \alpha \in \mathbb{Z})\, \frac{x}{y} = p^{\alpha}$$

(i) Demostrar que Ω_p es relación de equivalencia en $\mathbb{Q}^+$.

(ii) Escriba por extensión el siguiente conjunto

$$A = \{q \in [1]_{\Omega_2} \mid \frac{1}{8} \leq q \leq 8\}$$

P10.- (P2 Control 3, Año 2007)
Sea $A \neq \phi$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A. Se define la relación $\mathcal{R}^*$ en $A \times A$ por:

$$(a, b)\, \mathcal{R}^*\, (a', b') \Leftrightarrow (a\, \mathcal{R}\, a') \wedge (b\, \mathcal{R}\, b')$$

a) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de orden, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

b) Muestre que si A tiene al menos dos elementos y $\mathcal{R}$ es un orden total, entonces $\mathcal{R}^*$ es sólo un orden parcial.

c) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

d) Para $(a,b) \in A \times A$, demuestre que
$$[(a,b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}.$$

P11.- (P2 Control 3, Año 2009)
Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:
$$X \,\mathcal{R}\, Y \iff A \setminus X = A \setminus Y.$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Demuestre que el conjunto cuociente
$$\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]_{\mathcal{R}} \mid X \in \mathcal{P}(A)\}.$$

P12.- Sea $\mathcal{R}$ una relación definida de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ por:
$$(a,b) \,\mathcal{R}\, (c,d) \iff ad = bc$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y determine y determine $[(0,2)]_{\mathcal{R}}$, es decir, la clase de equivalencia de $(0,2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

b) En $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$ (conjunto cuociente) se define la relación Ω por:
$$[(a,b)]_{\mathcal{R}} \,\Omega\, [(c,d)]_{\mathcal{R}} \iff ad \leq bc.$$
Demuestre que Ω es relación de orden y determine si es un orden total o parcial.

P13.- (P2 Control 3, Año 2011)
Se considera en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:
$$(a,b) \,\mathcal{R}\, (c,d) \Leftrightarrow \text{ tal que } \; a \equiv_2 c \wedge b \equiv_3 d$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Encuentre el conjunto cuociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{R}$.

P14.- (P1 Control 3, Año 2012)

P15.- Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:
$$m \,\mathcal{R}\, n \Leftrightarrow m^2 - n^2 \text{ es múltiplo de 3.}$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Determine 4 elementos de $[0]_{\mathcal{R}}$ y de $[1]_{\mathcal{R}}$.

P16.- (P2 (a) Control Recuperativo, Año 2012)
En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se define la relación Ω por
$$a \,\Omega\, b \iff a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

(a.1) Demuestre que Ω es relación de equivalencia.

(a.2) Determine la clase de equivalencia de $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y describa el conjunto cociente.

P17.- (P2 Control 3, Año 2013)

a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ψ por
$$x \,\Psi\, y \Leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \text{ tal que } \; y - x = n.$$

(i) Demuestre que Ψ es una relación de orden.

(ii) Indique si es una relación de orden parcial o total. Justifique.

b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ por

$$x \, \Phi \, y \;\Leftrightarrow\; (\exists\, n \in \mathbb{Z}) \;\text{ tal que }\; y - x = n.$$

(i) Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.

(ii) Dado $p \in \mathbb{Z}$, calcule la clase de equivalencia $[p]_\Phi$.

P18.- [Relaciones y funciones] Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función.

a) Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de $\mathcal{R}$ que notamos $f^{-1}(\mathcal{R})$ por:

$$x_1 \; f^{-1}(\mathcal{R}) \; x_2 \iff f(x_1) \; \mathcal{R} \; f(x_2)$$

1) Probar que $f^{-1}(\mathcal{R})$ es una relación de equivalencia en X

2) Probar que $[x]_{f^{-1}(\mathcal{R})} = f^{-1}([f(x)]_\mathcal{R})$ para cada $x \in X$
Indicación: Notar que hay que probar una igualdad de conjuntos y que $[f(x)]_\mathcal{R}$ es un subconjunto de Y.

b) Suponga ahora que $\mathcal{R}'$ es una relación de equivalencia en X y que f es epiyectiva. Definimos en Y la relación imagen por:

$$y_1 \; f(\mathcal{R}') \; y_2 \iff \exists x_1, x_2 \in X, \; f(x_1) = y_1 \quad \wedge \quad f(x_2) = y_2 \quad \wedge \quad x_1 \; \mathcal{R}' \; x_2$$

1) Probar que si f es inyectiva entonces $f(\mathcal{R}')$ es de equivalencia y además pruebe que $\mathcal{R}' = f^{-1}(f(\mathcal{R}'))$, es decir, $\mathcal{R}'$ es igual a la relación preimagen de $f(\mathcal{R}')$

2) ¿Que ocurre si f no fuera inyectiva?
Propuesto: Defina f tal que no sea inyectiva y $f(\mathcal{R}')$ no esa de equivalencia