

MA1101 - Introducción al Álgebra

Auxiliar 14

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

04 de Agosto de 2020

Resumen

- Las raíces de la unidad son todos los w que satisfacen la ecuación $w^m = 1$, $m \in \mathbb{N}$
- Dada la materia de ~~polinomios~~ *complejas*, saben que hay m raíces (no necesariamente distintas) en $\mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación. Para obtenerlas, nos pasamos a forma polar.
- Las raíces de la unidad tienen forma $e^{\frac{2\pi k \cdot i}{n}}$, con $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ (Recuerden que $e^{2\pi \cdot i} = 1$)
- Definición de polinomio:** Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un polinomio es una función p de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ tal que para todo $x \in \mathbb{K}$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

- Dos polinomios son iguales sí y solo sí tienen los mismos coeficientes.

Resumen

- El **grado** de un polinomio es la mayor potencia a la que está elevada un x . $x^{10} + x^{28} - 3 \rightarrow gr = 28$
- Un polinomio se dice mónico si el coeficiente del x elevado a la mayor potencia es 1 (por ejemplo, $p(x) = x^2 + 2x$ es mónico. Sin embargo $q(x) = 2x^3 + 5$ no lo es).
- $p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^n (p_k + q_k)x^k$ $n = \max(gr(p), gr(q))$
- $p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^k (p_j \cdot q_{k-j}) \right) \cdot x^k \rightarrow (2x+3)(x+5) = 2x^2 + 10x + 3x + 15$
- $gr(p + q) \leq \max\{gr(p), gr(q)\} \rightarrow p = x^3 + 1, q(x) = -x^3 \rightarrow p+q = 1$
- $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$
- Teorema del Resto:** Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por $(x - c)$ es $p(c)$.
- Raíz de un polinomio:** Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es raíz del polinomio p si $p(c) = 0$
- Si c es raíz de un polinomio p entonces $(x - c) | p$

$$\left. \begin{array}{l} a : b = c \\ r \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = b \cdot c + r}$$

$$p(x) : (x - c) = q(x) \rightarrow p(x) = (x - c)q(x) + r(x)$$

$$p(c) = (\underbrace{c - c}_0)q(c) + r(c)$$

$\Rightarrow$ resto de dividir $p(x)$ por $x - c$ es r que es $p(c)$.

$$\text{gr}(p) = n$$

Resumen

$$x^2 + x + 1 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x - \left(-\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\right) \left(x - \left(-\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$

- Si $c_1, \dots, c_k$ son raíces distintas del polinomio p , entonces $(x - c_1) \cdots (x - c_k) \mid p(x)$.
- Si un polinomio p tiene grado $n \geq 1$, entonces p tiene a lo más n raíces distintas.
- Si un polinomio p tiene grado $\leq n$ y $c_1, \dots, c_{n+1}$ son raíces distintas de p , entonces p es el polinomio nulo.
- Sean p, q polinomios con grado a lo más $n \geq 1$. Si p y q coinciden en $n + 1$ puntos distintos, entonces $p = q$

$$\hookrightarrow p(c_1) = q(c_1); p(c_2) = q(c_2); \dots; p(c_{n+1}) = q(c_{n+1})$$

$q - p$: $n+1$ puntos distintos donde vale 0

$$\therefore p - q = 0 \Rightarrow p = q$$

$$p(x) := x+1$$
$$x = -1$$


Resumen

$$p \in \mathbb{C}[x] \rightarrow \exists c \in \mathbb{C}$$
$$\downarrow$$
$$p(c) = 0.$$

- **Teorema Fundamental del Álgebra** Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ y grado $n \geq 1$ tiene a lo menos una raíz compleja.
- Si p es un polinomio a coeficientes reales (i.e. $p \in \mathbb{R}[k]$) y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de p entonces $\bar{z}$ también es raíz de p .
- Si p es un polinomio mónico a coeficientes enteros $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, entonces si p tiene una raíz racional, esta (en verdad) es entera y divide a a_0 .
Dicho de otra forma, en este caso, candidatos a raíces del polinomio, son los divisores enteros del término libre.

$$\underbrace{(a_0)}_{\text{divisor}} + a_1 x + \dots + x^n$$

Polinomios

P1.

Calcular los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $q(x) = x^2 + 2x + 1$.

$$P(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \leftarrow a, b = ???$$

$$q(x) = x^2 + 2x + 1 \rightarrow \text{raíces de } q(x)?$$

$$\hookrightarrow (x+1)(x+1) \Rightarrow \underline{-1 \text{ dos veces.}}$$

Polinomios

Demostración

$$p(x) = 2x^4 + 6x^3 + 1$$

→ $f(x) = (x+1)(x+1) \rightarrow \text{¿?¿}$ ¿qué pasa con $p(x)$?

$$p(-1) = ? \quad 0 \checkmark \rightarrow p(x) = f(x) \cdot f_2(x)$$

$$p(x) = (x+1)(x+1)f_2(x)$$

$$p(-1) = 0 \cdot 0 \cdot f_2(-1)$$

$$\boxed{p(-1) = 0}$$

$$2 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot (-1)^3 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{2 - 6 + 1 = 0}$$

$$\boxed{6 = 2 + 1}$$

Polinomios

Demostración

$$(2x^4 + 6x^3 + 0 \cdot x^2 + 0x + 1) : (-x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + (b-2a) \cdot x + (-2b+3a)$$

$$-(2x^4 + 2ax^3 + 2x^2)$$

$$0 \quad (b-2a)x^3 - 2x^2 \cdot 0x + 1$$

$$- [(b-2a)x^3 + 2(b-2a)x^2 + (b-2a)x]$$

$$0 \quad (-2b+3a)x^2 + -(b-2a)x + 1$$

$$- [(-2b+3a) \cdot 2x + (-2b+3a)]$$

$$(-b+2a+4b-6a)x + 2b-3a+1$$



$$P(x) = f(x) \cdot [2x^2 + (1-a)x + (a-2)]$$

Polinomios

Demostración

me encantaría
al evaluar en -1 .

$$(-6 + 2a + 4b - 6a)x + 2b - 3a + 1 = 0$$

$$(-1)(3b - 4a) + 2b - 3a + 1 = 0$$

$$4a - 3b + 2b - 3a + 1 = 0$$

$$a - b + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 6x^3 + 1 : (x+1) = 2x^3 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline 0 \quad (b-2)x^3 + 1 \end{array}$$

Polinomios

Demostración $(b-a)x^3 + 1 : (x+1) = ax^3 + (b-a)x^2$
 $+ (a-b)x + (b-a)$
 $- [(b-a)x^3 + (b-a)x^2]$

$$-(b-a)x^2 + 1 = (a-b)x^2 + 1$$
$$- [(a-b)x^2 + (a-b)x]$$

$$(b-a)x + 1$$
$$- [(b-a)x + (b-a)]$$

$$a - b + 1 = 0$$

$$b = a + 1$$

a pañiz

$$\boxed{b = a + 1} \rightarrow p(x) = ax^4 + (a+1)x^3 + 1$$

Polinomios

$$(x-i)(x+i)(x-2) = (x-i)Q(x) + R(x)$$

P5.

Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes reales. Sea $R(x)$ tal que

$$P(x) = (x-1)Q(x) + R(x).$$

Si $R(4) = 0$ y $x = i$ es raíz de $P(x)$, calcule a, b, c .

- Teo del resto...
- $-i$ también es raíz de $p(x)$.

Polinomios

Demostración $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$i, -i$ son raíces:

$$i^3 + a(i)^2 + b \cdot i + c = 0 \rightarrow -i + (-a) + bi + c = 0$$

$$(-i)^3 + a(-i)^2 + b \cdot (-i) + c = 0 \rightarrow i + (-a) - bi + c = 0$$

$$-2a = -2c \Rightarrow \boxed{a = c}$$

$$-2i + 2bi = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$P(x) = x^3 + ax^2 + x + a$$

Polinomios

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Demostración $P(x) = x^3 + ax^2 + x + a$ lo dividimos por $x-1$ y vemos qué pasa.

$$(x^3 + ax^2 + x + a) : (x-1) = x^2 + (a+1)x + (a+2)$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$(a+1)x^2 + x + a$$

$$-[(a+1)x^2 - (a+1)x]$$

$$(a+2)x + a$$

$$-[(a+2)x - (a+2)]$$

$$(2a+2)$$

si suponemos que $R(x)$ es el resto $\Rightarrow a = -1$

$$P(x) = (x-1)[x^2 + (a+1)x + (a+2)] + 2a+2$$

$$P(x) = (x-1) \underbrace{x^2}_{Q(x)} + (a+1)x + a+2 + 2a+2$$

$$+ \underbrace{(a+1)x + a+2 + 2a+2}_{R(x)}$$

Polinomios

$$x^2 - i^2 = x^2 + 1$$

Demostración i y $-i$ son raíces $\Rightarrow$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x-i)(x+i)(\text{---})$$

$$(x^3 + 2x^2 + x + 2) : (x^2 + 1) = (x + 2)$$

$$\Rightarrow p(x) = (x+i)(x-i)(x+2)$$

$$(1+i)(1-i)(1+2) = P(1)$$

Polinomios

$$x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$$

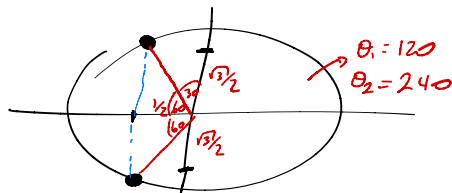
$$\Leftrightarrow (x-r_1)(x-r_2) \mid \text{---} \text{---} \checkmark \checkmark$$

$$\rightarrow x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n} = (x-r_1)(x-r_2)(\text{---} \text{---} \text{---})$$

P6.

Si $n = 3k \pm 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$, probar que $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

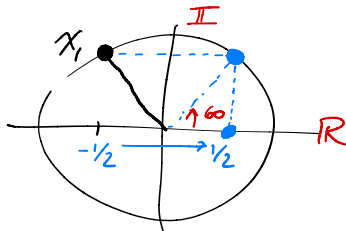
Polinomios

Demostración

$$x_1 = 1 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}} ; x_2 = 1 \cdot e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{3} \frac{120}{360} = \frac{\cancel{1}_3}{2\pi} \Rightarrow \cancel{1}_3 = 2\pi/3$$

$$\frac{240}{360} = \frac{2}{3} = \frac{\cancel{2}_2}{2\pi} \Rightarrow \cancel{2}_2 = 4\pi/3$$



$$x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n} \quad \text{reemplazando}$$

$$(e^{i \frac{2\pi}{3}})^{2n} + 1 + (e^{i \frac{2\pi}{3}} + 1)^{2n} \rightarrow \text{recordemos que } n = 3k \pm 1$$

$$(e^{i \frac{2\pi}{3}})^{2n} + 1 + (e^{i \pi/3})^{2n}$$

Polinomios

Demostración $(e^{i\frac{2\pi}{3}})^{2n} + 1 + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n}$ veamos

$= (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{2(3k+1)} + 1 + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2(3k+1)}$ $n=3k+1$
primero

$$= e^{i\frac{2\pi}{3}(6k+2)} + 1 + e^{i\frac{\pi}{3}(6k+2)}$$

$$= \cancel{e^{i4\pi k}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 + \cancel{e^{i2k\pi}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{2\pi}{3}})$$

$$= 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$$