

MA1101 - Introducción al Álgebra

Auxiliar 13

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

28 de Julio de 2020

Resumen

IMPORTANTE

$$i^2 = -1$$

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es el conjunto de los números complejos, dotados de las operaciones $+$, $\cdot$ de la siguiente forma.

Sean $z = (a, b)$, $w = (c, d) \in \mathbb{C} \longrightarrow \begin{aligned} z &= a + bi \\ w &= c + di \end{aligned}$

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$\begin{aligned} &\rightarrow a + c + (b + d)i \\ &\rightarrow ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$

$$z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$$

- El neutro de $(\mathbb{C}, +)$ es $(0, 0)$ y el neutro de $(\mathbb{C}, \cdot)$ es $(1, 0)$
- El inverso en $(\mathbb{C}, +)$ de (a, b) es $(-a, -b)$
- El inverso en $(\mathbb{C}, \cdot)$ para $(a, b) \neq (0, 0)$ es $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$
- La unidad imaginaria es el complejo $(0, 1)$. Se anota i . $\rightarrow 0 + 1 \cdot i$
- Un complejo (a, b) se puede escribir en **forma cartesiana** como $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- La parte real de un complejo $a + bi$ es a y se anota $\text{Re}(z)$
- La parte imaginaria de un complejo $a + bi$ es b y se anota $\text{Im}(z) \rightarrow \mathcal{I}_m(z)$
- Las **coordenadas polares** de $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$ son el par $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ donde:
 - r es la distancia de z al origen O . Se llama módulo de z y se anota $|z|$
 - θ es el ángulo que se forma entre el eje OX y el segmento que une z con el origen O . Se llama el argumento de z y se anota $\arg(z)$.
- El cambio de coordenadas es $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$.
- Para $\theta \in \mathbb{R}$ anotamos $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$ (también llamada forma *cis*, por *cos* + *i* · *sin*). La expresión $|z|e^{i \cdot \arg(z)}$ se llama la **forma polar** de z

$$z = (a, b) = a + bi = |z|e^{i \cdot \arg(z)} \quad \text{i 3 formas!}$$

Representación Gráfica

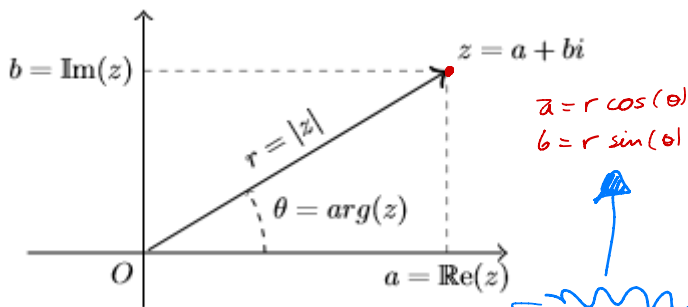


Figura: Un complejo en forma polar

Resumen

- El **conjugado** del complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

Trabajando en forma polar queda

$$z = |z|e^{i\arg(z)}, \bar{z} = |z|e^{-i\arg(z)} \rightarrow z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

- $z\bar{z} = |z|^2$ $\bar{z} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

- Para un complejo $z = a + bi$ se calcula $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Se tiene que $e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$



Complejos

P1.

- a) Demuestre que las raíces en $\mathbb{C}$ de la ecuación de segundo grado $z^2 + z + 1 = 0$, son las raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.
- b) Sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $z \neq 1$. Pruebe que

$$(1+z)^3 + (1+z^2)^9 + (1+z^3)^6 = 62$$

$$2) \quad z^2 + z + 1 = 0 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

z_1 y z_2 son distintos entre sí y son distintos a 1.

Complejos

Demostración $1 = e^{i2\pi}$ raíz n -ésima de la unidad

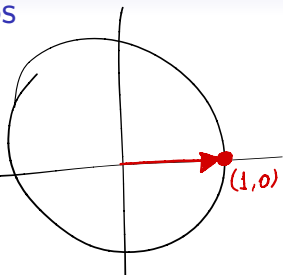
$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$(z_k)^n = \left(e^{i \frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i 2k\pi} = (e^{i 2\pi})^k \stackrel{k \in \mathbb{N}}{=} 1^k = 1.$$

$$z \text{ no unidad} \rightarrow z_k \neq e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

$$\hookrightarrow = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\theta}$$

lo vemos
a ver el
proximo aux.



Complejos

Demostración

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

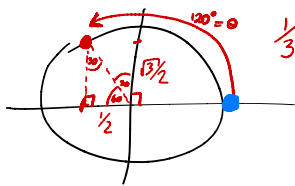
→ ¿llevarlo al cubo
y ver que pasa?

→ ¿llevarlo a forma
polar y ver que tiene
la forma correcta?

$z \rightarrow$ forma polar.

$$z_+ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|z_+| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

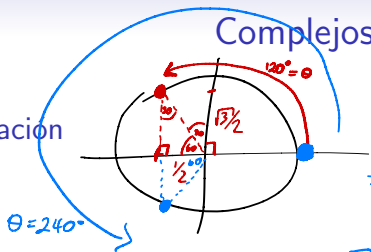


$$\frac{1}{3} \frac{120}{360} = \frac{x}{2\pi} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = x$$

$$z_+ = |z_+| e^{i \arg(z_+)} = 1 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

Complejos

Demostración



$$z_- = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{z}{\frac{2}{3}} = \frac{240}{360} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$z_- = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = |z_-| e^{i \arg(z_-)}$$

$$|z_-| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$z_- = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}}$$

$$z_+ = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$$

Las raíces cúbicas de la unidad se ven:

$$e^{\frac{i \cdot 2k\pi}{3}}, k \in \{1, 2, 3\} \rightarrow k \in \{0, 1, 2\}$$

↙ ↓ ↘

$$e^{\frac{2\pi \cdot i}{3}} \quad e^{\frac{4\pi \cdot i}{3}} \quad e^{\frac{2\pi \cdot i}{3}}$$

(1)

$$(z_-)^3 = e^{i4\pi} = 1$$

$$(z_+)^3 = e^{i2\pi} = 1$$

Complejos

Demostración

- b) Sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $z \neq 1$. Pruebe que

$$\underbrace{(1+z)^3}_{1?} + \underbrace{(1+z^2)^9}_{2?} + \underbrace{(1+z^3)^6}_{3?} = 62$$

$$3) (1+z^3)^6 = (1+1)^6 = 2^6 = 64$$

$$\Rightarrow (1+z)^3 + (1+z^2)^9 = -2 \leftarrow \text{pdg}$$

$$z^2 + z + 1 = 0, \leftarrow \begin{array}{l} \text{los } z \text{ que cumplen} \\ \text{esto son las raíces} \\ \text{cúbicas de la unidad } \neq 1. \end{array}$$

$$\hookrightarrow z^2 + 1 = -z$$

$$\hookrightarrow z + 1 = -z^2, \text{ reemplazando:}$$

$$(-z^2)^3 + (-z)^9 = -z^6 - z^9 = -(z^3)^2 - (z^3)^3 = -1 - 1 = -2$$

Complejos

Demostración

Finalmente

$$(1+z)^3 + (1+z^2)^9 + (1+z^3)^6$$
$$= -1 -1 + 64 = 62 \sim$$

Complejos

P2.

a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{(1-i)^n} + \underbrace{(1+i)^n} \in \mathbb{R}$.

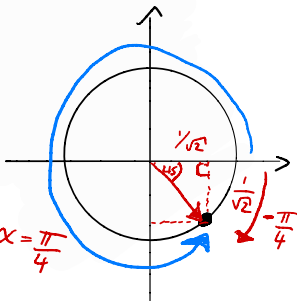
$1-i \rightarrow$ forma polar.

$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$1-i = \sqrt{2} \cdot e^{i(-\pi/4)}$$

$$\frac{45}{360} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



Podemos obtener el $1+i$ a partir del $1-i$?
sí! pues son conjugados uno del otro.

Complejos

Demostración

$$1-i = \sqrt{2} e^{i(-\pi/4)}$$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2} e^{-i(-\pi/4)} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Miramos entonces $(1-i)^n + (1+i)^n$

$$= (\sqrt{2} e^{i(-\pi/4)})^n + (\sqrt{2} e^{i\pi/4})^n$$

$$= \sqrt{2}^n e^{-i \frac{n\pi}{4}} + \sqrt{2}^n e^{i \frac{n\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}^n \left(e^{-i \frac{n\pi}{4}} + e^{i \frac{n\pi}{4}} \right) \rightarrow z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \checkmark$$

$$= \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) \in \mathbb{R} \checkmark$$

Complejos

P4.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios, y $u, v \in \mathbb{C}$, tales que:

$$z_1 + z_2 = -u, \quad (1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = v. \quad (2)$$

- a) Muestre que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.
- b) Muestre que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.
- c) Muestre que $u = \overline{u} \cdot v$.
- d) Si las formas polares de u y v son $|u|e^{i\varphi}$ y $|v|e^{i\theta}$ respectivamente, muestre que $\theta = 2\varphi + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Complejos

$$z_1 + z_2 = -u,$$

$$z_1 \cdot z_2 = v.$$

Demostración

a) Muestre que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.

$$|u| = |-u| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$$

$$\therefore |u| \leq 2$$



$$|v| = |z_1 \cdot z_2| = | |z_1| \cdot e^{i \arg(z_1)} \cdot |z_2| \cdot e^{i \arg(z_2)} |$$

$$= | |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\arg(z_1) + \arg(z_2))} |$$

saltarse
este paso?
sí.
↯

$$= | \cancel{|z_1|} \cdot \cancel{|z_2|} \cdot \underbrace{1}_{=1} \cdot e^{i(\arg(z_1) + \arg(z_2))} |$$

$$= 1 \quad \text{y} \quad \therefore |v| = 1.$$

Complejos

$$z_1 + z_2 = -u,$$

$$z_1 \cdot z_2 = v.$$

Demostración b) Muestre que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.

$$(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = \overline{(z_1 + z_2)} \quad (\text{propiedad})$$

$$-\frac{u}{v} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad (\text{me encantaría esto uuu})$$

$$z \overline{z} = |z|^2 \rightarrow \text{hint.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z_1 + z_2 &= (z_1 \cdot z_2) \overline{z_1} + (z_1 \cdot z_2) \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 z_2 + |z_2|^2 \cdot z_1 \\ &= 1 \cdot z_2 + 1 \cdot z_1 = z_1 + z_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Complejos

Demostración

$$\frac{-u}{n} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_2}$$

$$= \frac{z_2 \cdot \overline{z_2} \cdot z_1 + z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2}{z_1 \cdot z_2}$$

$$= \frac{(\cancel{z_1} \cdot z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})}{\cancel{z_1} \cdot \cancel{z_2}}$$

$$= \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{llegando a lo pedido}$$

Complejos

Demostración c) Muestre que $u = \bar{u} \cdot v$.

$$z_1 + z_2 = -u,$$

$$z_1 \cdot z_2 = v.$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -\frac{u}{v}. \quad \} \text{ Herramientas.}$$

$$\frac{u}{v} = \bar{u} \Leftrightarrow -\frac{u}{v} = -\bar{u} \Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -\bar{u}$$

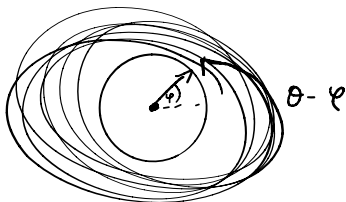
$$\Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -(-\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \underline{\quad}$$

Complejos

Demostración

$$\left. \begin{array}{l} |u| \leq 2, |v| = 1 \\ z_1 + z_2 = -u, \\ z_1 \cdot z_2 = v. \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}. \\ u = \overline{u} \cdot v. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \text{Herramientas}$$



- d) Si las formas polares de u y v son $|u|e^{i\varphi}$ y $|v|e^{i\theta}$ respectivamente, muestre que $\theta = 2\varphi + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Usaremos 4!

$u \neq 0$

$$u = \overline{u} \cdot v$$

$$|u|e^{i\varphi} = |u|e^{-i\varphi} \cdot |v|e^{i\theta}$$

$$|u|e^{i\varphi} = |u|e^{-i\varphi} e^{i\theta}$$

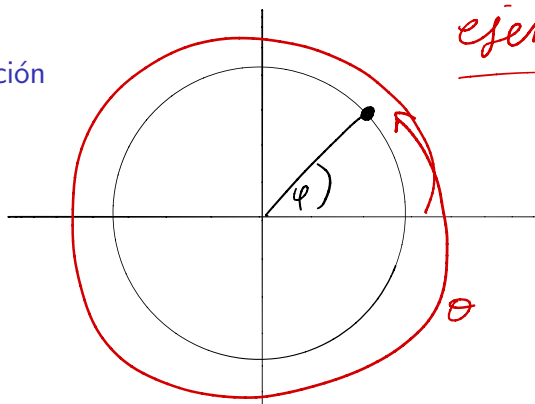
$$\cancel{|u|}e^{i\varphi} = \cancel{|u|}e^{i(\theta - \varphi)} \quad \text{vueltas}$$

$$\rightarrow \varphi = \theta - \varphi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\varphi = \theta + 2k\pi$$

Complejos

Demostración



ejemplo

$$\theta = \varphi + 2\pi k$$