Anillo

Demostración

P1. *a)* (2,5 ptos) Dé un ejemplo de conjuntos A y B, conjuntos numerables, tales que $A \cap B$ no sea numerable.

b) (3,5 ptos) Demuestre que el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{N}$, que poseen cardinalidad menor o igual que dos, es decir:

$$C = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| \leq 2\}$$

es numerable.

1) a) no numerable → ? No, pues $|A \cap B| \leq |A| = |\mathbb{N}|$.

finito → ? $(\mathbb{Z} \cap [0, \infty)) \cap (\mathbb{Z} \cap (-\infty, 4])$

$A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \to |A \cap B| = 5$ no es num.

pares, impares

$\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-$.

→ no numerable.

b) $f : C \to \cancel{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ → es un poco difícil dar con una función ⇒ otro enfoque

Anillo

$D \subseteq C \subseteq B$, B y D son numerables,

Demostración

$C = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| \leq 2\}$

$C' \subseteq C$: $C' = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 1\}$ → $C' = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\}$

$f: \mathbb{N} \longrightarrow C'$ biy $\Rightarrow |C'| = |\mathbb{N}|$, como $C' \subseteq C$

$x \longrightarrow \{x\}$

$\Rightarrow |C| \geq |\mathbb{N}|$

$C = \underbrace{C_0}_{\substack{A \subseteq \mathbb{N} \\ |A| = 0}} \cup \underbrace{C_1}_{\substack{A \subseteq \mathbb{N} \\ |A| = 1}} \cup \underbrace{C_2}_{\substack{A \subseteq \mathbb{N} \\ |A| = 2}}$

$C_0 \to 1$, $C_1 \to C'$

$f: C_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ← numerables por ser prod. finito de num.

$\{a, b\} \to (\min(a,b), \max(a,b))$

Veamos que esta función es inyectiva.

Anillo

$f : C_2 \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\{a,b\} \longrightarrow (a,b)$

$\{b,a\} \longrightarrow (b,a)$ ×

 ×

Demostración

$$f : C_2 \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$\{a,b\} \longrightarrow (\min(a,b), \max(a,b))$$

basta ver que f es inyectiva $\longrightarrow |C_2| \leq |\mathbb{N}|$ y unión finita de finitos con numerables es numerable.

Sean $\{a,b\}, \{c,d\} \in C_2$:

$$f(\{a,b\}) = f(\{c,d\}) \Rightarrow (\min(a,b), \max(a,b)) = (\min(c,d), \max(c,d))$$

$$\Rightarrow \min(a,b) = \min(c,d) \wedge \max(a,b) = \max(c,d)$$

$$¿\{a,b\} = \{c,d\}?$$

$a \neq b$ y $c \neq d \Rightarrow (c = a \wedge d = b) \vee (c = b \wedge d = a)$

de cualquier forma $\{a,b\} = \{c,d\} \therefore |C_2| \leq |\mathbb{N}|$

$\Rightarrow |C| = |C_0 \cup C_1 \cup C_2| \leq |\mathbb{N}|$

y con lo anterior, concluimos.

( ) paréntesis

Anillo

Demostración

Unión numerable de conjuntos finitos es a lo más numerable!

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1\} = \{1\} \cup \{1\} \cup \{1\} \cup \cdots$$

$$= \{1\}$$ ← podría ser finito

P2. Sea $(K, +, \bullet)$ un cuerpo. Se sabe que $(K \times K, \oplus, \odot)$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \bullet x_2, y_1 \bullet y_2)$ es un anillo conmutativo con unidad (no es necesario que lo demuestre).

a) (2.0 ptos.) Encuentre neutro para $\oplus$ y neutro para $\odot$ en $K \times K$.

b) (3.0 ptos.) Demuestre que para $(a, b) \neq 0_{K \times K}$.
(a, b) es invertible $\Leftrightarrow$ (a, b) no es un divisor del cero.

c) (1.0 pto.) ¿Es $(K \times K, \oplus, \odot)$ cuerpo?. Justifique.

Demostración

i) $(x, y) \oplus (e_1, e_2) = (x, y)$

ii) $(x, y) \odot (u_1, u_2) = (x, y)$

i) $(x, y) \oplus (e_1, e_2) = (x + e_1, y + e_2) = (x, y)$

$$\rightarrow \begin{matrix} x + e_1 = x \\ y + e_2 = y \end{matrix} \Rightarrow e_1, e_2 = 0_K \rightarrow (0_K, 0_K)$$

ii) $(x, y) \odot (u_1, u_2) = (x \cdot u_1, y \cdot u_2) = (x, y)$

$$\begin{matrix} x \cdot u_1 = x \\ y \cdot u_2 = y \end{matrix} \Rightarrow u_1, u_2 = 1_K \rightarrow (1_K, 1_K)$$

Demostración

P2. Sea $(K,+,\bullet)$ un cuerpo. Se sabe que $(K\times K,\oplus,\odot)$ con $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ y $(x_1,y_1)\odot(x_2,y_2)=(x_1\bullet x_2,y_1\bullet y_2)$ es un anillo conmutativo con unidad (no es necesario que lo demuestre).

a) (2.0 ptos.) Encuentre neutro para $\oplus$ y neutro para $\odot$ en $K\times K$.

b) (3.0 ptos.) Demuestre que para $(a,b)\neq 0_{K\times K}$.
(a,b) es invertible $\Leftrightarrow$ (a,b) no es un divisor del cero.

c) (1.0 pto.) ¿Es $(K\times K,\oplus,\odot)$ cuerpo?. Justifique.

$\Rightarrow)$ (a,b) es invertible $\Rightarrow \exists (c,d)$ tq $(a,b)\odot(c,d)=1_{K\times K}$

$\hookrightarrow (a\cdot c, b\cdot d)=(1_K,1_K)$, como K es un cuerpo,

a,b invertible para $K \Rightarrow a,b\neq 0_K$.

$\Rightarrow$ (a,b) no es divisor de cero?

divisor de cero $\rightarrow (f,g)\neq 0_{K\times K}$ tal que

$$(a,b)\odot(f,g)=0_{K\times K}$$

$$\overset{def}{\longrightarrow} (a\cdot f, b\cdot g) = 0_{K\times K} = (0_K,0_K)$$

$\rightarrow a\cdot f=0_K \wedge b\cdot g=0_K$, pero no puede pasar porque $a,b\neq 0 \Rightarrow f,g=0$ $\divideontimes$.

Anillo

$\exists (c,d) : (c,d) \neq 0$
$\wedge\ (a,b) \odot (c,d) = 0$

Demostración

$\Leftarrow$) (a,b) no es div. de 0.

$\forall (c,d) \in k \times k : (c,d) = 0_{k\times k} \vee (a,b)\odot(c,d) \neq 0_{k \times k}$

$\exists (c,d) \in k \times k : (a,b) \odot (c,d) = (1_k, 1_k)$

$a \cdot c = 1_k$, $b \cdot d = 1_k \Rightarrow c = a^{-1}$, $d = b^{-1}$,

basta con que $a \neq 0_k \wedge b \neq 0_k$ ($\neq a \neq 0_k \vee b \neq 0_k$)

Supongamos que alguno fuera 0_k. (spdg. a)

$(a,b) = (0_k, b)$, se propone lo siguiente:

$(0_k, b) \odot (1_k, 0_k) = (0_k, 0_k) = 0_{k\times k}$, pero

$(1_k, 0_k) \neq (0_k, 0_k)$ lo que contradice la hipótesis.

Anillo

Demostración

P2. Sea $(K, +, \bullet)$ un cuerpo. Se sabe que $(K \times K, \oplus, \odot)$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ y $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \bullet x_2, y_1 \bullet y_2)$ es un anillo conmutativo con unidad (no es necesario que lo demuestre).

a) (2.0 ptos.) Encuentre neutro para $\oplus$ y neutro para $\odot$ en $K \times K$.

b) (3.0 ptos.) Demuestre que para $(a, b) \neq 0_{K\times K}$.
(a, b) es invertible $\Leftrightarrow$ (a, b) no es un divisor del cero.

c) (1.0 pto.) ¿Es $(K \times K, \oplus, \odot)$ cuerpo?. Justifique. No es cuerpo

c) $(0_K, 1_K) \neq 0_{K\times K} = (0_K, 0_K)$

¿es invertible? $(0_K, 1_K) \odot (a, b) = (1_K, 1_K)$

¿a, b? $\rightarrow$ a no existe

¿por qué es div de cero? $(0_K, 1_K) \odot (1_K, 0_K)$

$= (0_K, 0_K) = 0_{K\times K}.$

P2. *a)* (3.0 ptos.) Considere el anillo $(6\mathbb{Z}, +, *)$ donde $6\mathbb{Z} := \{6 \cdot k | k \in \mathbb{Z}\}$, la operación $+$ es la adición habitual en $\mathbb{Z}$ y la operación $*$ se define por

$$a * b = \frac{a \cdot b}{6} \quad \text{para todo } a, b \in 6\mathbb{Z}.$$

Encuentre un isomorfismo de anillos entre $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(6\mathbb{Z}, +, *)$. Justifique. (Nota: No es necesario probar que $(6\mathbb{Z}, +, *)$ es anillo.)

b) (3.0 ptos.) Sean A, B, C, D conjuntos (no necesariamente finitos) tales que $|A| = |B|$ y $|C| = |D|$. Demuestre que

$$|A \times C| = |B \times D|.$$

Demostración

homomorfismo de anillos!

$$f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$$

$$f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y)$$

$$f(1_A) = 1_B$$

$$f(x) = 6x \quad ¿\text{Servirá}?$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$6(x+y) = 6x + 6y \checkmark$$

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$$

$$6(x \cdot y) = 6(x) * 6(y)$$

$$6xy = \frac{(6x)\cdot(6y)}{6} = 6xy \checkmark$$

neutro en $(6\mathbb{Z}, +, *)$?

$\forall a \in 6\mathbb{Z}$ **Anillo**

Demostración $a * e = \dfrac{a \cdot e}{6} = a$

$a \cdot e = 6a \Rightarrow e = 6$

finalmente $f(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{6\mathbb{Z}} = 6$

$\parallel$

$f(1) = 6 \cdot 1 = 6$ ✓

$f(x) = 6x$ es un morfismo de anillo entre $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(6\mathbb{Z}, +, *)$

Anillo

$f: \mathbb{Z} \to 6\mathbb{Z}$

es biyectivo?

Demostración

$f(x) = f(y) \Rightarrow 6x = 6y \Rightarrow x = y$

Será que $\forall y \in 6\mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}$ tq:

$f(x) = y \to 6x = y \to 6x = 6k$ ← por definición de $6\mathbb{Z}$

$\to x = k \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ f es isomorfismo de anillos.

Anillo

A, B, C, D tq $|A| = |B| \wedge |C| = |D|$

Demostración

¿ $|A \times C| = |B \times D|$? Por la hipótesis $\exists f, g$, biy:

$f: A \to B$, $g: C \to D$

$h: A \times C \longrightarrow B \times D$

$(a, c) \longrightarrow (f(a), g(c))$

$a \in A$

$c \in C$

iny. $h((a,b)) = h((c,d))$

$(f(a), g(b)) = (f(c), g(d))$

$a = c \wedge b = d$ ✓✓

epi. sea $(b,d) \in B \times D$, luego, como f, g son biyectivas $\exists a, c \in A, C$ tq

$f^{-1}(b) = a$

$g^{-1}(d) = c$ $\Rightarrow h((a,c)) = (b,d)$