MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 12

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

21 de Julio de 2020

Resumen

Subgrupos

- Sea $(A, *)$ un grupo, y $\phi \neq H \subseteq A$. Diremos que $(H, *)$ es **subgrupo**, si $(H, *)$ es un grupo, o equivalentemente $(\forall x, y \in H)\ x * y^{-1} \in H$.

Δ dist. resp. a $\heartsuit$

$a \Delta (b \heartsuit c)$

$(a \Delta b) \heartsuit (a \Delta c)$

Resumen

Estructuras más fuertes

Sea $(A, +, \cdot)$ un conjunto con dos estructuras:

- Se dice **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, y además $\cdot$ es asociativa y distribuye con respecto a $+$.
- Se dice **anillo conmutativo con unidad** si es un anillo, y $\cdot$ es conmutativo y posee neutro. (1)
- Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad con $|A| > 1 \Rightarrow 0 \neq 1$.
- Sean x, y ambos no nulos. Si $x \cdot y = 0$ se dice que x e y son **divisores de cero.**
  Notar que en este caso $x \cdot a = x \cdot b \not\Rightarrow a = b$.
- Se dice **cuerpo** si es un anillo conmutativo con unidad y $\forall x \in A \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

Notar que todo cuerpo no tiene divisores del cero (ojo es solo una implicancia).

Subgrupos

Clausura.

(A, Δ) grupo, (B, Δ) subgrupo $\iff \forall x, y \in B \quad x \Delta y^{-1} \in B$.

P1.

Sean $(A, *_A)$, $(B, *_B)$ grupos y $f : A \to B$ morfismo.

1. Demuestre que si $(C, *_A)$ es subgrupo entonces $(f(C), *_B)$ también lo es.
2. Demuestre que si $(D, *_B)$ es subgrupo entonces $(f^{-1}(D), *_A)$ también lo es.

Sean $x, y \in f(C) \Rightarrow \exists a, b \in C$ tq $f(a) = x \wedge f(b) = y$

será que $x *_B y^{-1} \in f(C)$?

$\underline{f \text{ morfismo}}$

$x *_B y^{-1} = f(a) *_B (f(b))^{-1} = f(a) *_B f(b^{-1}) = f(a *_A b^{-1})$

$x = f(a) \quad a, b \in C \subseteq A$

$y = f(b) \quad x, y \in f(C) \subseteq B$

Subgrupos

Demostración $\underbrace{f(a *_A b^{-1})}_{\in f(C)}$

Hipótesis: $(C, *_A)$ es subgrupo

$\iff a *_A b^{-1} \in C$

$\forall x, y \in f(C),\ x *_B y \in f(C)$

luego, como x, y eran arbitrarios,

luego, $(f(C), *_B)$ es subgrupo

$(h_1 * k_1)^{-1} = k_1^{-1} * h_1^{-1}$

Subgrupos

P2.

$(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Probar que el conjunto

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$.

Sean $x, y \in H*K$, luego $x = h_1 * k_1$, $y = h_2 * k_2$ $\quad h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$

$x * y^{-1} \in H * K$? (sí)

$x * y^{-1} = (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} = (h_1 * k_1) * (k_2^{-1} * h_2^{-1})$

$(h_2 * k_2)^{-1}$? $k_2^{-1} * h_2^{-1} \xrightarrow{\checkmark} (h_2 * k_2) * (k_2^{-1} * h_2^{-1}) = e$

Subgrupos

* como asocia y conmuta podríamos ignorar los paréntesis.

Demostración

$$(h_1 * k_1) * (k_2^{-1} * h_2^{-1}) = (h_1 * k_1) * (h_2^{-1} * k_2^{-1}) = h_1 * (k_1 * (h_2^{-1} * k_2^{-1}))$$

$$= h_1 * ((k_1 * h_2^{-1}) * k_2^{-1}) = h_1 * ((h_2^{-1} * k_1) * k_2^{-1}) = h_1 * (h_2^{-1} * (k_1 * k_2^{-1}))$$

$$= \underbrace{(h_1 * h_2^{-1})}_{\substack{\in H \\ \text{(por clausura)}}} * \underbrace{(k_1 * k_2^{-1})}_{\substack{\in K \\ \text{(por clausura)}}} \in H * K$$

H es subgrupo

K es subgrupo

$\therefore x * y^{-1} \in H * K$, luego, $H * K$ es subgrupo

Anillo

a es divisor de cero si : $a \neq 0,\ \exists b \in A, b \neq 0 : a \cdot b = 0.$

P4.

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo. $\exists x$

~~(a)~~ Si $a \in A$ es un divisor de 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$,entonces $a \cdot b$ es divisor de 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor de 0, entonces al menos uno de ellos es divisor de 0.

Se dice **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, y además $\cdot$ es asociativa y distribuye con respecto a $+$.

a) $\exists d \in A$, no nulo, tal que $(a \cdot b) \cdot d = 0$

ya sabemos que $a \cdot b \neq 0$ y $a \cdot b \in A$.

$\exists x \in A$ tq $x \neq 0$ y $a \cdot x = 0$.

$a \neq 0,\ x \neq 0$

$a \cdot x = 0$

$a \cdot b \neq 0$

$a \cdot b \cdot d = 0$ ¡quiero!

tal que $d \neq 0$

ojalá multiplicar $a \cdot x = 0$ por b a ambos lados

Anillo

Demostración

$$b\cdot(a\cdot x) = b\cdot 0$$

por ser A anillo

$$\begin{array}{ccc} b\cdot(a\cdot x) & = & b\cdot 0 \\ \| & & \| \\ (b\cdot a)\cdot x & & 0 \end{array}$$

por ser conmutativo

$$\| $$

$$(a\cdot b)\cdot x = 0$$

$$(a\cdot b)\cdot d = 0$$
$$\neq$$
$$(b\cdot a)\cdot d$$

no necesariamente

$(a\cdot b)\cdot x = 0$

$a\cdot b \neq 0$

$x \neq 0$

$x \in A$

$\therefore$ $a\cdot b$ es divisor de cero.

A anillo conmutativo

Anillo

$a \cdot b$ es div. de cero $\overset{!}{\Rightarrow}$ a div. 0 $\vee$ b div 0

Demostración

$a \cdot b$ es div. de 0, $\exists c \in A : c \neq 0, (a \cdot b) \cdot c = 0$

i) $a \cdot (b \cdot c) = 0$

→ Si a es divisor de cero ✓

→ Si a no es divisor de cero:

↳ $a = 0$: esto implica $a \cdot b = 0$ ✗ pq $a \cdot b$ es div. 0

↳ $b \cdot c = 0$: esto implica que b es div. de 0, pues $b \neq 0$ (por lo mismo que a) y $c \neq 0 \Rightarrow b$ es div. de 0.

Luego, como esos son todos los casos, se tiene lo pedido.

Anillo

P5.

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por

$$G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$

$a \cdot a$

~~(I)~~ Mostrar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.

~~(II)~~ Sea $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Pruebe que H es subgrupo de G.

(III) Si $A = \mathbb{Z}_8$, encuentre G y H.

i) asocia? $\to$ sí, porque $(A, +, \cdot)$ es anillo $\Rightarrow$ $(A, \cdot)$ asocia $\Rightarrow$ $(G, \cdot)$ asocia.

ii) neutro? $\longrightarrow$ sí, porque $(A, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad

Anillo

Demostración

iii) inverso: $(G, \cdot)$ tienen inverso? porque así se define G.

iv) conmuta — conmutativo.

$\therefore$ $(G, \cdot)$ es grupo abeliano.

II) $H = \{a^2 \mid a \in G\}$ pdq: H es subgrupo de G.

$H \subseteq G$? Sí, pues $a \cdot a \in G$, por ser $(G, \cdot)$ grupo.

Luego, $H \subseteq G$.

Clausura: $x, y \in H \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$, $x = a^2$ $a \in G$

$y = b^2$ $b \in G$

Anillo

$b^2 \cdot (b^{-1} \cdot b^{-1}) = 1$
$\therefore (b^2)^{-1} = (b^{-1})^2$

Demostración

$x \cdot y^{-1} = a^2 \cdot (b^2)^{-1} = a^2 \cdot (b^{-1})^2$

$= (a \cdot a)(b^{-1} \cdot b^{-1}) = (a b^{-1})(a b^{-1}) \in H$?

$(G, \cdot)$ es abeliano
$\Rightarrow$ ignoramos
los paréntesis

$= (ab^{-1})^2 \in H$? $\rightarrow a \cdot b^{-1} \in G$
¿por qué?

① $\rightarrow a, b \in G \Rightarrow b^{-1} \in G$, luego, como $\cdot$ es lci $a \cdot b^{-1} \in G$

② $\rightarrow a, b \in G \Rightarrow G$ es subgrupo de $(A, \cdot) \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in G$.

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Anillo $\Rightarrow$ neutro para $\cdot$ es 1.

Demostración

$\mathbb{Z}_8 = \{[a] : 0 \le a < 8, \ a \in \mathbb{N}\}$

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

$G = \{1, 3, 5, 7\}$

$H = \{a^2 \mid a \in G\}$

$H = \{1\}$

$1 \cdot 1 = 1 \pmod 8$ $\qquad 1 \cdot 1 = 1$

$3 \cdot 3 = 1 \pmod 8$ $\qquad 3 \cdot 3 = 9 \to 1$

$5 \cdot 5 = 1 \pmod 8$ $\qquad 5 \cdot 5 = 25 \to 1$

$7 \cdot 7 = 1 \pmod 8$ $\qquad 7 \cdot 7 = 49 \to 1$