MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 12

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

21 de Julio de 2020

Resumen

Subgrupos

- Sea $(A, *)$ un grupo, y $\phi \neq H \subseteq A$. Diremos que $(H, *)$ es **subgrupo**, si $(H, *)$ es un grupo, o equivalentemente $(\forall x, y \in H)\ x * y^{-1} \in H$.

Resumen

Estructuras más fuertes

Sea $(A, +, \cdot)$ un conjunto con dos estructuras:

- Se dice **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, y además $\cdot$ es asociativa y distribuye con respecto a $+$.
- Se dice **anillo conmutativo con unidad** si es un anillo, y $\cdot$ es conmutativo y posee neutro.
- Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo con unidad con $|A| > 1 \Rightarrow 0 \neq 1$.
- Sean x, y ambos no nulos. Si $x \cdot y = 0$ se dice que x e y son **divisores de cero.**
  Notar que en este caso $x \cdot a = x \cdot b \not\Rightarrow a = b$.
- Se dice **cuerpo** si es un anillo conmutativo con unidad y $\forall x \in A \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

Notar que todo cuerpo no tiene divisores del cero (ojo es solo una implicancia).

Subgrupos

P1.

Sean $(A, *_A)$, $(B, *_B)$ grupos y $f : A \to B$ morfismo.

1. Demuestre que si $(C, *_A)$ es subgrupo entonces $(f(C), *_B)$ también lo es.
2. Demuestre que si $(D, *_B)$ es subgrupo entonces $(f^{-1}(D), *_A)$ también lo es.

Subgrupos

Demostración

Subgrupos

P2.
$(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Probar que el conjunto

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$.

Subgrupos

Demostración

Anillo

P4.

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor de 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$,entonces $a \cdot b$ es divisor de 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor de 0, entonces al menos uno de ellos es divisor de 0.

Anillo

Demostración

Anillo

P5.

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por

$$G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$

(I) Mostrar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.

(II) Sea $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Pruebe que H es subgrupo de G.

(III) Si $A = \mathbb{Z}_8$, encuentre G y H.

Anillo

Demostración