Muchos conjuntos

P4.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) | \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A\}$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

Dem: Veamos que $\forall n \in \mathbb{N}$: $f_n : A \to f_n(A)$ está bien definida y es epiy. luego, tendremos que $|f_n(A)| \overset{*}{\leq} |A|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, sabemos que $f_n(A) = \{f_n(a) | a \in A\} \subseteq \{f_n(a) | a \in A, n \in \mathbb{N}\} = B$. Así, uniendo todas las n: $B = \{f_n(a) | a \in A, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(a) | a \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(A)$

usando $*$ $|B| = |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(A)| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A| = |\mathbb{N}|$ pues unión numerable de numerable es numerable.

Finalmente, $|B| \geq |f_0(A)| = |A| = |\mathbb{N}|$. $\therefore$ B es numerable y concluimos!