

MA1101 - Introducción al Álgebra

Auxiliar 11

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

14 de Julio de 2020

Resumen

Homomorfismos

- Una función $f : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de $(A, *)$ en (B, Δ) si $\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$.
- Cuando f es inyectiva, se llama un *monomorfismo*
- Cuando f es epiyectiva se llama un *epimorfismo*
- Cuando f es biyectiva se llama un *isomorfismo*. En este último caso decimos que f es un *isomorfismo* entre $(A, *)$ y (B, Δ) .
- Cuando $(A, *) = (B, \Delta)$, los *homomorfismos* se llaman *endomorfismos* y, si son biyectivos, se llaman *automorfismos*. En estos casos decimos que f es un *endomorfismo* o *automorfismo* en $(A, *)$.

Resumen

Homomorfismos

- Si $f : A \rightarrow B$ un *epimorfismo* de $(A, *)$ en (B, Δ) , entonces se tienen las siguientes propiedades:
- Si $(A, *)$ es asociativa, entonces (B, Δ) también lo es.
- Si $(A, *)$ es conmutativa, entonces (B, Δ) también lo es.
- Si e es neutro de $(A, *)$, entonces $f(e)$ es neutro de (B, Δ) .
- Si $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ) .

Resumen

Homomorfismos

Tenemos lo siguiente

- Sea f un homomorfismo, no necesariamente epiyectivo, de $(A, *)$ en (B, Δ) , con neutros e_A y e_B , respectivamente.
 - Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$
 - Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ) .
- Dos estructuras $(A, *)$ y (B, Δ) son *isomorfas*, denotado $(A, *) \cong (B, \Delta)$, si existe una función $f : A \rightarrow B$ que es un isomorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ) .

Resumen

Homomorfismos

Tenemos lo siguiente

- Sea $(G, *)$ una estructura algebraica. Diremos que $(G, *)$ es grupo si:
 - $*$ es asociativa
 - $*$ admite neutro en G
 - todo elemento $x \in G$ posee inverso $x^{-1} \in G$
 - (Abeliano) si $*$ conmuta

Homomorfismos

P1.

- Sea $G = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\star$ la ley de composición interna definida por

$$a \star b = \frac{a + b}{1 + ab} \quad \forall a, b \in G.$$

Demuestre que $(G, \star)$ es un grupo abeliano.

- Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Muestre que la función $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y que también es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$, donde las operaciones $+$ y $\cdot$ denotan la suma y producto usuales en $\mathbb{R}$.

Homomorfismos

Demostración

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab} \quad \forall a, b \in G.$$

i) - * asociativa: $(a * b) * c$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{a+b}{1+ab} \right) * c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab} \cdot c} = \frac{\frac{a+b+c(1+ab)}{1+ab}}{1 + \frac{(a+b) \cdot c}{1+ab}} = \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+ab}}{\frac{1+ab+ac+bc}{1+ab}} \\
 &= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a * (b * c) &= a * \left(\frac{b+c}{1+bc} \right) = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a \cdot \frac{b+c}{1+bc}} = \frac{\frac{a(1+bc) + b+c}{1+bc}}{\frac{1+bc + a(b+c)}{1+bc}} = \frac{a+abc+b+c}{1+bc+ab+ac}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow *$ asociativa.

Homomorfismos

Demostración

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab} \quad \forall a, b \in G.$$

neutro? $a \star e \stackrel{?}{=} a$
||

$$\frac{a+e}{1+a \cdot e} = a \Rightarrow a+e = a \cdot (1+ae)$$

$$\cancel{a}+e = \cancel{a}+a^2e$$

$$e = a^2e \Rightarrow e(1-a^2) = 0$$

$$a \in (-1, 1) \Rightarrow 1-a^2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{e=0}$$

Homomorfismos

Demostración

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab} \quad \forall a, b \in G.$$

Inversos ? $a \star i = 0$

$$\frac{a+i}{1+a \cdot i} = 0 \Rightarrow a+i=0$$

" $\Rightarrow i = -a$

$$a \in (-1,1) \Rightarrow a < 1 \wedge a > -1 \Rightarrow -a > -1 \wedge -a < 1$$
$$\Rightarrow -a \in G$$

Homomorfismos

Demostración

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab} \quad \forall a, b \in G.$$

$\star$ conmuta : $a \star b = \frac{a+b}{1+a \cdot b} = \frac{b+a}{1+b \cdot a} = b \star a \quad \checkmark$

Luego, 0 es neutro en $(G, \star)$ } gracias
 $-a \in G$ es inverso de $a \quad \forall a \in G.$ } conmutatividad!

$\therefore G$ es grupo abeliano.

Homomorfismos

Demostración

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

pdte: $f(x) = x^5$ es homomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$

$$f(a * b) = f(a) + f(b)$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios:

$$f(a * b) = f\left(\sqrt[5]{a^5 + b^5}\right) = \left(\sqrt[5]{a^5 + b^5}\right)^5 = a^5 + b^5$$

" $f(a) + f(b)$

Queremos que f sea isomorfismo, necesitamos que f sea homomorfismo y, además, biyectiva.

$f(x) = x^5$ es biyectiva $\rightarrow$ saber

Homomorfismos

Demostración

$f(x) = x^5$ es isomorfismo entre $(\mathbb{R}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, \cdot)$

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5 = f(a) \cdot f(b).$$

Luego, como $f(x) = x^5$ es biyectiva en $\mathbb{R}$, tenemos que f es isomorfismo en $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Homomorfismos

P2.

Considere la estructura algebraica $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

- ✍ Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.
- ✍ ¿Es $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ un grupo?
- ✍ Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.
- ✍ ¿Es $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{[0]\}, \cdot_4)$ un grupo?

$\cdot_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	0	0	0	0	0
$[1]_5$	0	1	2	3	4
$[2]_5$	0	2	4	1	3
$[3]_5$	0	3	1	4	2
$[4]_5$	0	4	3	2	1

- asociativa? sí
- neutro? sí el 1
- todos sus elementos tienen inverso?
NO! el 0 no.

Homomorfismos

Demostración todos sus elementos tienen inverso?

$$\Leftarrow: [1]_5 \cdot [1]_5 = [1]_5$$

$$[2]_5 \cdot [3]_5 = [3]_5 \cdot [2]_5 = [1]_5$$

$$[4]_5 \cdot [4]_5 = [1]_5$$

hasta acá ya
es grupo



• es conmutativa

$$[a]_5 \cdot [b]_5 = [a \cdot b]_5 = [b \cdot a]_5 = [b]_5 \cdot [a]_5 \quad \text{abeliano}$$

$\therefore (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_5\}, \cdot)$ es grupo abeliano

Homomorfismos

Demostración

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

$$\begin{aligned}[2]_4 \cdot [2]_4 \\ = [4]_4 = [0]_4\end{aligned}$$

2 no tiene inverso $\Rightarrow (\mathbb{Z}_4 \setminus \{[0]\}, \cdot_4)$ no es grupo (ni siquiera es e.z.)

Homomorfismos

P3.

Sea $(G, *)$ un grupo.

- Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano si y sólo si $\varphi : G \rightarrow G$ dada por $\varphi(g) = g * g$ es un homomorfismo.
- Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano si y sólo si $\varphi : G \rightarrow G$ dada por $\varphi(g) = g^{-1}$ es un automorfismo.

$$\Rightarrow \varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

$$\underbrace{(a*b)}_{\text{1 solo elemento}} * \underbrace{(a*b)}_{\text{1 solo elemento}} = a * \underbrace{(b*(a*b))}_{\text{2 solo elementos}} = a * ((b*a)*b)$$

$$\begin{aligned} \text{comutativo} & \quad \text{associativo} & \quad \text{associativo} \\ = a * ((a * b) * b) &= a * (a * (b * b)) &= (a * a) * (b * b) \\ & &= \varphi(a) * \varphi(b) \end{aligned}$$

Homomorfismos

Demostración $\Leftarrow \int p d q : (G, *)$ conmuta.

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b) = (a * a) * (b * b)$$

$$\downarrow$$

$$(a * b) * (a * b)$$

$$\xrightarrow{\text{asocio}} a * (b * (a * b))$$

$$\hookrightarrow a^{-1} * [a * (b * (a * b))] = a^{-1} * [(a * a) * (b * b)]$$

a^{-1} existe

pg 6 es grupo

$$\hookrightarrow \underbrace{(a^{-1} * a)}_e * (b * (a * b)) = [a^{-1} * (a * a)] * (b * b)$$

$$= b * (a * b) = \underbrace{[(a^{-1} * a) * a]}_e * (b * b)$$

$$= a * (b * b)$$

Homomorfismos

Demostración $b * (a * b) = a * (b * b)$
 $(b * a) * b = (a * b) * b$

b^{-1} existe, pues $(G, *)$ es grupo

$$\begin{aligned} [(b * a) * b] * b^{-1} &= [(a * b) * b] * b^{-1} \\ (b * a) * \underbrace{(b * b^{-1})}_e &= (a * b) * \underbrace{(b * b^{-1})}_e \end{aligned}$$

$$b * a = a * b$$

a, b arbitrarios: $(G, *)$ es grupo abeliano

Homomorfismos

$$\varphi(g) = g'$$

Demostración

- φ es homomorfismo
 - φ es biyectivo
- φ es automorfismo.

$$\Rightarrow \varphi(a * b) \stackrel{\text{nos gustaría}}{=} \varphi(a) * \varphi(b)$$

$$\stackrel{||}{\subset} (a * b)^{-1} \stackrel{?}{=} a^{-1} * b^{-1} \quad ?$$

$$(a * b) * (a^{-1} * b^{-1}) \stackrel{!}{=} e \Leftrightarrow (a^{-1} * b^{-1} = (a * b)^{-1})$$

$$\hookrightarrow (b * a) * (a^{-1} * b^{-1})$$

$$= b * (a * (a^{-1} * b^{-1}))$$

$$= b * ((a * a^{-1}) * b^{-1}) = b * (e * b^{-1}) = b * (b^{-1}) = e \quad \checkmark$$

Homomorfismos

$\varphi(g) = g^{-1}$ es biyectiva:

Demostración

• es epyectiva? por qué?

$\forall g \in G: \varphi(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$ y $g^{-1} \in G$, pues G es grupo.

• es inyectiva? por qué?

Supongamos $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Leftrightarrow g_1^{-1} = g_2^{-1} \quad / g_1 * ()$

$$\underbrace{g_1 * g_1^{-1}}_e = g_1 * g_2^{-1} \quad / () * g_2$$

$$e * g_2 = (g_1 * g_2^{-1}) * g_2$$

$$g_2 = g_1 * \underbrace{(g_2^{-1} * g_2)}_e$$

$$g_2 = g_1$$

φ es automorfismo

Homomorfismos

Demostración

 $\Leftarrow$ φ es automorfismo y queremos que G sea abeliano.

$$a * b = b * a$$

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b) \rightarrow \text{en vez de tomar } a \text{ y } b, \text{ tomaremos } a^{-1} \text{ y } b^{-1}.$$

$$(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$$

$$\varphi(a^{-1} * b^{-1}) = \varphi(a^{-1}) * \varphi(b^{-1})$$

$$= \underbrace{(a^{-1} * b^{-1})^{-1}} = a * b$$

nos gustaría $\rightarrow b * a \rightarrow (a^{-1} * b^{-1}) * (b * a) = e$

Homomorfismos

Demostración

$$\begin{aligned}(a^{-1} * b^{-1}) * (b * a) &\stackrel{?}{=} e \\&= a^{-1} * (b^{-1} * (b * a)) \\&= a^{-1} * ((b^{-1} * b) * a) \\&= a^{-1} * (e * a) \\&= a^{-1} * a = e \quad \checkmark\end{aligned}$$

$\Rightarrow (a^{-1} * b^{-1})^{-1} = b * a = a * b$ (el inverso es único, por ser φ autorfismo)

y por lo tanto $(G, *)$ es abeliano ✓