MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 10

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

07 de Julio de 2020

Resumen

Estructuras algebraicas

- **Def:** Dado un conjunto A no vacío. Una *ley de composición interna* (o *l.c.i*) en A es una función

$$\begin{aligned} * : A \times A &\to A \\ (x, y) &\to x * y \end{aligned}$$

  Es decir, una operación que toma dos elementos de un conjunto cuyo resultado es un elemento del conjunto.
- Ejemplos de ello son:
- $+$ en $\mathbb{R}$
- $\cdot$ en $\mathbb{Q}$
- $\cup$ en $\mathcal{P}(A)$, donde A es un conjunto
- entre otros...

Resumen

Estructuras algebraicas

- Si $*$ es una *l.c.i.* sobre A, entonces al par $(A, *)$ lo llamamos estructura algebraica.
- Si tenemos una segunda operación Δ sobre A, entonces denotamos por $(A, *, \Delta)$ la estructura algebraica que considera ambas leyes de composición interna en A.
- Ejemplos de ello son:
- $(\mathbb{N}, +, \cdot), (\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\{V, F\}, \wedge, \vee)$
- entre otros...

Resumen

Estructuras algebraicas

- Recuerdo de la estructura $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$
- $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$
- $[a]_n +_n [b]_n = [a+b]_n$
- $[a]_n \cdot_n [b]_n = [a \cdot b]_n$
- Esto será importante para los próximos contenidos, así que vale la pena mencionarlo (es una estructura algebraica con dos *l.c.i.*)
- En general, en vez de escribir tantas cosas sub n, haremos lo siguiente

$$a + b \equiv c \ (mod \ n)$$

señalando que todo es trabajo en $\mathbb{Z}_n$

Resumen

Estructuras algebraicas

Las *l.c.i.* tienen las siguientes posibles propiedades:

- Asociatividad $\forall x, y, z\ (x * y) * z = x * (y * z)$
- Elemento neutro (e), $\forall x,\ x * e = e * x = x$
- Inverso x de y y viceversa $x * y = y * x = e$
- Conmutatividad $\forall x, y\ x * y = y * x$
- Absorbente (a), $\forall x,\ x * a = a$
- Idempotente (a), $a * a = a$
- Cancelable (a),
  $\forall x, y\ a * x = a * y \Rightarrow x = y \wedge x * a = y * a \Rightarrow x = y$
- Δ distribuye respecto a $*$
  $\forall x, y, z\ x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z) \wedge (x*y)\Delta z = (x\Delta z)*(y\Delta z)$

Estructuras Algebraicas

P1.

Dado un conjunto no vacío A, sea $F = \{f : A \to A | f \text{ es biyectiva}\}$.
Se define la operación $*$ de la siguiente manera:

$$\forall f, g \in F, f * g = f \circ g$$

- Pruebe que $*$ es una ley de composición interna.
- Estudie la asociatividad de $*$
- Estudie la conmutatividad de $*$
- Encuentre el elemento neutro de $*$
- Estudie la existencia de elementos inversos en F.

Estructuras Algebraicas

Demostración

i) $*$ es l.c.i. → cómo dem. eso?
$f \circ g \in F$ ... pero, es así?

$F = \{ f \mid f : A \to A \text{ y es biyectiva} \}$

$f, g \in F \Rightarrow f \circ g \in F$? $f \circ g : A \to A$ pues $g : A \to A$ y $f : A \to A$.

$f \circ g$ es biy. pues tanto f como g son biyectivas.

ii) Asociatividad: Sí, por contenidos vistos anteriormente.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$(f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f \circ (g \circ h)(x)$$

Estructuras Algebraicas

Demostración

iii) Conmutatividad ¿sí o no?

$f \circ g \neq g \circ f$, $f, g \in F$.

$f: 2x+3$
$g: x+1$

$(f \circ g)(x) = 2(g(x)) + 3 = 2(x+1) + 3 = 2x+5$ $\neq$
$(g \circ f)(x) = (f(x)) + 1 = 2x+3+1 = 2x+4$

iv) elemento neutro: $f(x) = x$ ojalá apañe.

$f \circ g = g \circ f = g$ $\forall g \in F$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$ $\Big\} = g(x)$ luego, f es elemento neutro.

Estructuras Algebraicas

Demostración

a) Sea $g \in F$, queremos ver si g tiene inverso: (¿será el inverso)

$g \circ i = i \circ g = f$ → f es la identidad

(quizás llamarlo e sería mejor)

Intuitivamente, los muchachos proponen la función inversa. ¿Será que con eso están listos?

→ Las funciones en f son biyectivas, entonces tienen inversa.

→ van de A en A entonces sus inversas también.

→ la inversa también es biyectiva, entonces está en F.

Luego, $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g =$ identidad ⇝ todos los elementos de F tienen inv.

Estructuras Algebraicas

P2.

Sea $S = \{a, b, c\}$ (donde a, b y c son todos distintos) y $*$ la ley de composición interna dada por la siguiente tabla

*	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$a * c = a$

Determine si $*$ es asociativa en S. Identifique el elemento neutro de S, encuentre los inversos para $*$ y determine si son únicos.

ii) c es el elemento neutro (basta ver su fila y su columna)

i) $(a * b) * c = a * (b * c) \Rightarrow a * b = a * b$

Estructuras Algebraicas

Demostración

*	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$(x*y)*z = x*(y*z)$

$a\,b\,b$

$(a*b)*b$ $\quad$ $a*(b*b)$

$c*b$ $\quad$ $a*a$

b $\neq$ c

$*$ no asocia.

inversos: $x*i = i*x = c$

$a*a=c$ → a es inverso de sí mismo

$a*b=c$

$b*a=c$ → a es inverso de b y viceversa.

$c*c=c$

no son únicos, pues a tiene 2 inversos.

Estructuras Algebraicas

P3.

Considere la estructura algebraica $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

- Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.
- ¿Es $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ un grupo?
- Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.
- ¿Es $(\mathbb{Z}_4, \{[0]\}, \cdot_4))$ un grupo?

Estructuras Algebraicas

Demostración

$$(a,b) * (1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0)$$
$$= (a, b)$$

$$(1,0) * (a,b) = (1 \cdot a, 0 \cdot a + b)$$
$$= (a, b)$$

$\Rightarrow$ $(1,0)$ es el neutro.

Estructuras Algebraicas

Demostración

$(ac, bc+d) * (e, f)$

$(ace, bce+de+f)$

$(a, b) + (ce, de+f)$

$(ace, bce+de+f)$

$a \neq 0 \Rightarrow$ invert.

$(a, b) * (i_1, i_2) = (1, 0)$

$(ai_1, bi_1 + i_2) = (1, 0) \rightarrow i_1 = \frac{1}{a}$

$\frac{b}{a} + i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{-b}{a}$

Estructuras Algebraicas

Demostración

$(\mathbb{Z}_m, +_m) \longrightarrow \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}$

i) $+_m$ es asociativa:

$$([a]_m +_m [b]_m) +_m [c]_m$$

$$[a+b]_m +_m [c]_m = [(a+b)+c]_m$$

$$= [a+(b+c)]_m = [a]_m +_m [b+c]_m$$

$$= [a]_m +_m ([b]_m +_m [c]_m)$$

Estructuras Algebraicas

Demostración

• $e + [a]_m = [a]_m + e = [a]_m$

$[0]_m + [a]_m = [a+0]_m = [a]$, lo mismo en la otra dirección. $\therefore$ $[0]_m$ es neutro para $+_m$.

• Sea $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$.

$[a]_m + i = [0]_m$, $i + [a]_m = [0]_m$

el candidato (el buen candidato) es $[m-a]_m$

reemplazando:

$[a]_m + [m-a]_m = [a+m-a]_m = [m]_m = [0]_m$

$[m-a]_m + [a]_m = [m-a+a]_m = [m]_m = [0]_m$

Estructuras Algebraicas

Demostración

¿Por qué $[m-a]_m$ y no solo $[-a]_m$?

Son lo mismo, pero, la definición del conjunto $\mathbb{Z}_m$ es con clases representadas por enteros de 0 a $m-1$, $-a$ estaría fuera, para evitar problemas, usamos $m-a$.

$0 \leq a \leq m \Rightarrow 0 \geq -a \geq -m$

$m \geq m-a \geq 0 \Rightarrow [m-a]_m \in \mathbb{Z}_m$.

Luego, todos los elementos de $\mathbb{Z}_m$ son invertibles para $+_m$.

Estructuras Algebraicas

Demostración $[m]_m = k \cdot m + m = (k+1) \cdot m + 0$

$\Rightarrow [m]_m = [0]_m.$