MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 10

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

07 de Julio de 2020

Resumen

Estructuras algebraicas

- **Def:** Dado un conjunto A no vacío. Una *ley de composición interna* (o *l.c.i*) en A es una función

$$\begin{aligned} * : & A \times A \to A \\ & (x, y) \to x * y \end{aligned}$$

  Es decir, una operación que toma dos elementos de un conjunto cuyo resultado es un elemento del conjunto.
- Ejemplos de ello son:
- $+$ en $\mathbb{R}$
- $\cdot$ en $\mathbb{Q}$
- $\cup$ en $\mathcal{P}(A)$, donde A es un conjunto
- entre otros...

Resumen

Estructuras algebraicas

- Si $*$ es una *l.c.i.* sobre A, entonces al par $(A, *)$ lo llamamos estructura algebraica.
- Si tenemos una segunda operación Δ sobre A, entonces denotamos por $(A, *, \Delta)$ la estructura algebraica que considera ambas leyes de composición interna en A.
- Ejemplos de ello son:
- $(\mathbb{N}, +, \cdot), (\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\{V, F\}, \wedge, \vee)$
- entre otros...

Resumen

Estructuras algebraicas

- Recuerdo de la estructura $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$
- $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$
- $[a]_n +_n [b]_n = [a+b]_n$
- $[a]_n \cdot_n [b]_n = [a \cdot b]_n$
- Esto será importante para los próximos contenidos, así que vale la pena mencionarlo (es una estructura algebraica con dos *l.c.i.*)
- En general, en vez de escribir tantas cosas sub n, haremos lo siguiente

$$a + b = c \ (mod \ \ n)$$

señalando que todo es trabajo en $\mathbb{Z}_n$

Resumen

Estructuras algebraicas

Las *l.c.i.* tienen las siguientes posibles propiedades:

- Asociatividad $\forall x, y, z \; (x * y) * z = x * (y * z)$
- Elemento neutro (e), $\forall x \; x * e = e * x = x$
- Inverso x de y y viceversa $x * y = y * x = e$
- Conmutatividad $\forall x, y \; x * y = y * x$
- Absorbente (a), $\forall x \; x * a = a$
- Idempotente (a), $a * a = a$
- Cancelable (a),
  $\forall x, y \; a * x = a * y \Rightarrow x = y \wedge x * a = y * a \Rightarrow x = y$
- Δ distribuye respecto a $*$
  $\forall x, y, z \; x \Delta (y * z) = (x \Delta y) * (x \Delta z) \wedge (x * y) \Delta z = (x \Delta z) * (y \Delta z)$

Estructuras Algebraicas

P1.

Dado un conjunto no vacío A, sea $F = \{f : A \to A | f \text{ es biyectiva}\}$.
Se define la operación $*$ de la siguiente manera:

$$\forall f, g \in F, f * g = f \circ g$$

- Pruebe que $*$ es una ley de composición interna.
- Estudie la asociatividad de $*$
- Estudie la conmutatividad de $*$
- Encuentre el elemento neutro de $*$
- Estudie la existencia de elementos inversos en F.

Estructuras Algebraicas

Demostración

Estructuras Algebraicas

P2.

Sea $S = \{a, b, c\}$ (donde a, b y c son todos distintos) y $*$ la ley de composición interna dada por la siguiente tabla

*	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Determine si $*$ es asociativa en S. Identifique el elemento neutro de S, encuentre los inversos para $*$ y determine si son únicos.

Estructuras Algebraicas

Demostración

Estructuras Algebraicas

P3.

Considere la estructura algebraica $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

- Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.
- ¿Es $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ un grupo?
- Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.
- ¿Es $(\mathbb{Z}_4, \{[0]\}, \cdot_4))$ un grupo?

Estructuras Algebraicas

Demostración