MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 9

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

23 de Junio de 2020

Resumen

Conjuntos infinitos

- Ya vimos que hay conjuntos que son finitos, el objeto de estudio de esta clase serán los conjuntos infinitos.

Resumen

Conjuntos infinitos

- Ya vimos que hay conjuntos que son finitos, el objeto de estudio de esta clase serán los conjuntos infinitos.
- **Def:** Un conjunto que no es finito se dirá **infinito**.

Resumen

Conjuntos infinitos

- Ya vimos que hay conjuntos que son finitos, el objeto de estudio de esta clase serán los conjuntos infinitos.
- **Def:** Un conjunto que no es finito se dirá **infinito**.
- **Ej:** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ entre otros.

Resumen

$\iff \exists f$: función tal que $f: A \to \mathbb{N}$ es biyectiva.

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de $\mathbb{N}$

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de $\mathbb{N}$
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de $\mathbb{N}$
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito
- **Prop:** Todo conjunto A infinito cumple $|A| \geq |\mathbb{N}|$

$\exists f$: función $\mathbb{N} \to A$ inyectiva

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de $\mathbb{N}$
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito
- **Prop:** Todo conjunto A infinito cumple $|A| \geq |\mathbb{N}|$
- **Prop:** Sea A infinito y B finito. Entonces $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de $\mathbb{N}$
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito
- **Prop:** Todo conjunto A infinito cumple $|A| \geq |\mathbb{N}|$
- **Prop:** Sea A infinito y B finito. Entonces $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ también lo es. En general, si $A_1, \ldots, A_n$ es una familia de n conjuntos numerables, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} Ai$ también lo es.

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es numerable

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es numerable
- **Prop:** $\mathbb{Q}$ es numerable

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es numerable
- **Prop:** $\mathbb{Q}$ es numerable
- **Prop:** Unión numerable de conjuntos numerables es numerable

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es numerable (A_n numerable)

- $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1, \ldots,$ $f(n) = a_n, \ldots$

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es numerable
- **Prop:** $\mathbb{Q}$ es numerable
- **Prop:** Unión numerable de conjuntos numerables es numerable
- Pero... todos los infinitos se comportan así?

Para pensar señoras y señores

Figura: Deep

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto. Es decir, si A es un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto. Es decir, si A es un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- **Prop:** $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]|$

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto. Es decir, si A es un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- **Prop:** $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |[0,1]|$
- **Prop:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0,1]| = |\mathbb{R}|$. En particular, $\mathbb{R}$ no es numerable.

Cardinalidad

P1.

Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{x \in [0, \infty) | \; \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$$

- Encontrar una bijección (más o menos explícita) entre alguien numerable y mi conjunto.
- Es infinito y su cardinal es menor o igual al de alguien numerable.

$\hookrightarrow$ infinito $\Rightarrow |A| \geq |\mathbb{N}|$

2) $\Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}|$ $\Rightarrow |A| = |\mathbb{N}|$ ✓

Cardinalidad

$$C = \{x \in [0,\infty) | \; \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$$

Demostración

$C_i = \{x \in [0, \infty) \mid x^i \in \mathbb{N}\}$

- $C \subseteq C_i$ → no es así, pues en verdad la inclusión es al revés. $C_i \subseteq C$.
- $\bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} C_i = C$

↳ $\bigcup_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} C_i \subseteq C$, pues cada $C_i \subseteq C$, luego, su unión también.

↳ $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} C_i$, sea $x \in C$, luego, $\exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tal que $x^n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in C_n \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} C_i$ ↯

Cardinalidad

Demostración Basta demostrar que cada C_i es a lo más numerable para concluir.

$$C_i = \{x \in [0,\infty) : x^i \in \mathbb{N}\} \to |C_i| \leq |\mathbb{N}|$$

Demostraremos que $f(x) = x^i$ es inyectiva:

$$f: C_i \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^i$$

$\underline{\text{Iny}}$: $f(x) = f(y)$

$$x^i = y^i \quad / \sqrt[i]{(\;)} \;??$$

$$\underline{\underline{x = y}}$$

$$\Rightarrow |C_i| \leq |\mathbb{N}|$$

Cardinalidad

Demostración Ya sabemos que $|C_i| \leq |\mathbb{N}|$

Como unión numerable de numerables es numerable, $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} C_i$ será a lo más numerable. Necesitamos entonces ver que es infinito. Para ello basta considerar

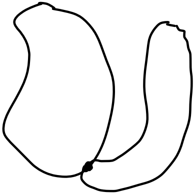
$i = 1$. $C_1 = \{x \in [0,\infty) \mid x^{-1} \in \mathbb{N}\}$
$= \mathbb{N}$

Luego, $|\mathbb{N}| = |C_1| \leq \left|\bigcup_{i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} C_i\right| = |C|$

Conjuntos Infinitos

P2.

Sean A, B, C tres conjuntos infinitos tales que:
$A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $|B| = |C|$.



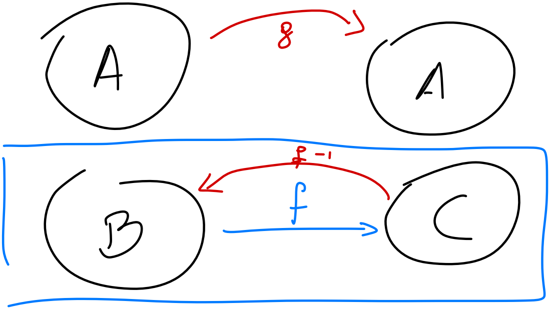
- ¿Qué relación hay entre $|A \cup B|$ y $|A \cup C|$?
- ¿Y qué se puede decir si $|B| \leq |C|$?
- ¿Y si $A \cap B = \{x_0\}$?

En todos los casos, demuestra tus afirmaciones.

a) Igual, hallar una biyección más o menos explícita: Como $|B| = |C|$, $\exists f$ función biyectiva de B en C.

Conjuntos Infinitos

Demostración



Vamos a definir g por partes.

$$g : A \cup B \longrightarrow A \cup C$$

$$x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ f(x), & x \in B \end{cases}$$

Conjuntos Infinitos

Demostración g es biyectiva ?

iny: $g(x) = g(y)$

en particular, inyectiva.

$x, y \in A$: $x = y$ ✓

$x, y \in B$: $f(x) = f(y) \to f$ biy. $\to x = y$. ✓

$x \in A$, $y \in B$. $g(x) \neq g(y)$, porque $A \cap C = \emptyset$.

epiy: Sea $x' \in A \cup C$:

$x' \in A$: Quiero un $x \in A \cup B$ tal que $g(x) = x'$, basta tomar $x = x'$, pues como $x' \in A$ $g(x') = x'$.

Conjuntos Infinitos

Demostración $x' \in C$: Queremos un $x \in A \cup B$ tal que $g(x) = x'$, $x = f^{-1}(x')$, f es bijectiva y por tanto tiene inversa, $f^{-1}(x') \in B$.

Luego, $g(f^{-1}(x')) = f(f^{-1}(x')) = x'$.

Finalmente, g es epiyectiva y por lo tanto $|A \cup B| = |A \cup C|$.

Conjuntos Infinitos

Demostración b) g será muy parecida a la de antes:

$$g: A \cup B \longrightarrow A \cup C$$
$$x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

La demostración es exactamente igual a la de injectividad de la parte A.
No puedo afirmar que $|A \cup B| = |A \cup C|$, pues si A y B fueran numerables y C no numerable, entonces se cumple el enunciado pero no hay biyección entre $A \cup B$ y $A \cup C$. $\therefore |A \cup B| \leq |A \cup C|$

Conjuntos Infinitos

Prop: B infinito, A finito:

Demostración

$|B| = |B \setminus A|$

$B' = B \setminus \{x_0\}$

$A \cap B' = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $|B'| \overset{\text{prop}}{=} |B| \overset{\text{hip.}}{=} |C|$

a) $|A \cup B'| \overset{*}{=} |A \cup C|$

$\quad = |A \cup B|$

$* \; A \cup B = A \cup B'$

b) $|A \cup B'| \leq |A \cup C|$

$\quad = |A \cup B|$

Props

$* \; f: \mathbb{N} \to A$
$n \to (0,0,n)$ iny.

P3.

- Determine la cardinalidad del conjunto
$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$.
- Demuestre que si X es infinito y $x \in X$ entonces $|X| = |X \setminus \{x\}|$.

$(0,0,n) \in A \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |A| \geq |\mathbb{N}|$ *

(tengo a lo menos la cantidad de los naturales)

- no numerable unu
- numerable ✓✓ ¿POR QUÉ?

Props

$x_1 + x_2 + x_3 = n$

Demostración sea $(x_1, x_2, x_3) \in A$:

$x_1 = n - x_2 - x_3$, por clausura en los enteros x_1 tiene que ser entero.

$\exists n \in \mathbb{N}:$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_1 + x_2 + x_3 = n\}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ son numerables y producto finito de numerables es numerable $\Rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es num.

$A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (por qué?)

Sea $(x_1, x_2, x_3) \in A \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$

Props

$$|A| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

Demostración

Luego, sumado a lo anterior, A es numerable.

6) Si X es numerable, entonces $|X| = |X \setminus \{x\}|$ con $x \in X$.

Sabemos que como X es numerable lo podemos enumerar: ¿Qué es esto? Ordenar los elementos de X:

$$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Props

Demostración $x \in X, \ \exists! i \in \mathbb{N} : x = x_i$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$
$$n \longrightarrow f(n) = x_n$$

$$\begin{array}{lcl}
0 & \longrightarrow & x_0 \\
1 & \longrightarrow & x_1 \\
2 & \longrightarrow & x_2 \\
\vdots & & \\
i-1 & \longrightarrow & x_{i-1} \\
i & \longrightarrow & \cancel{x_i} = x \\
i+1 & \longrightarrow & x_{i+1} \\
i+2 & & x_{i+2} \\
 & & x_{i+3} \\
\vdots & &
\end{array}$$

!!

Con esta reparación tenemos que $\hat{f}$ sera bijectiva.

Props

Demostración

$$\tilde{f} : \mathbb{N} \longrightarrow X \setminus \{x\}$$
$$n \longrightarrow \tilde{f}(n) = \begin{cases} x_n & n < i \\ x_{n+1} & n \geq i \end{cases}$$

<u>iny</u>: $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(b)$

$a, b < i \quad x_a = x_b$

$a = b$ ✓

$a, b \geq i \quad x_{a+1} = x_{b+1}$

$a+1 = b+1$

$a = b$ ✓

$a < i,\ b \geq i$

$x_a = x_{b+1}$

$a < i,\ b+1 > i$

$\Rightarrow$ este caso no puede ocurrir, los x no pueden ser iguales.

Props

Demostración epiy. Sea $y \in X \setminus \{x\}$,

$y = x_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{i\}$. Luego, n puede ser de dos tipos:

$$n < i \Rightarrow \tilde{f}(n) = x_n = y \quad \checkmark$$

$$n \geq i \Rightarrow \tilde{f}(n-1) = x_n = y$$

$$n \geq i,\ n \neq i \Rightarrow n \geq i+1 \Rightarrow n-1 \geq i$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(n-1) = x_{n-1+1} = x_n$$

Props

Demostración f es biyectiva $\Rightarrow |X \setminus \{x\}| = |\mathbb{N}|$

y $|X| = |\mathbb{N}|$ $\therefore$ $|X| = |X \setminus \{x\}|$

Muchos conjuntos

P4.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) | \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A\}$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

Muchos conjuntos

Demostración