

MA1101 - Introducción al Álgebra

Auxiliar 9

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

23 de Junio de 2020

Resumen

Conjuntos infinitos

- Ya vimos que hay conjuntos que son finitos, el objeto de estudio de esta clase serán los conjuntos infinitos.

Resumen

Conjuntos infinitos

- Ya vimos que hay conjuntos que son finitos, el objeto de estudio de esta clase serán los conjuntos infinitos.
- **Def:** Un conjunto que no es finito se dirá **infinito**.

Resumen

Conjuntos infinitos

- Ya vimos que hay conjuntos que son finitos, el objeto de estudio de esta clase serán los conjuntos infinitos.
- **Def:** Un conjunto que no es finito se dirá **infinito**.
- **Ej:** \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} entre otros.

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de \mathbb{N}

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de \mathbb{N}
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de \mathbb{N}
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito
- **Prop:** Todo conjunto A infinito cumple $|A| \geq |\mathbb{N}|$

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de \mathbb{N}
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito
- **Prop:** Todo conjunto A infinito cumple $|A| \geq |\mathbb{N}|$
- **Prop:** Sea A infinito y B finito. Entonces $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Def:** Un conjunto infinito se dirá **numerable** si su cardinal es igual al de \mathbb{N}
- **Prop:** $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito
- **Prop:** Todo conjunto A infinito cumple $|A| \geq |\mathbb{N}|$
- **Prop:** Sea A infinito y B finito. Entonces $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ también lo es. En general, si A_1, \dots, A_n es una familia de n conjuntos numerables, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ también lo es.

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si A_1, \dots, A_n son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es numerable

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si A_1, \dots, A_n son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es numerable
- **Prop:** \mathbb{Q} es numerable

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si A_1, \dots, A_n son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es numerable
- **Prop:** \mathbb{Q} es numerable
- **Prop:** Unión numerable de conjuntos numerables es numerable

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable
- **Prop:** Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable. Además, en general, si A_1, \dots, A_n son conjuntos numerables, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es numerable
- **Prop:** \mathbb{Q} es numerable
- **Prop:** Unión numerable de conjuntos numerables es numerable
- Pero... todos los infinitos se comportan así?

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto. Es decir, si A es un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto. Es decir, si A es un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- **Prop:** $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |[0, 1]|$

Resumen

Conjuntos infinitos

- **Prop:** El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto. Es decir, si A es un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- **Prop:** $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |[0, 1]|$
- **Prop:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$. En particular, \mathbb{R} no es numerable.

Cardinalidad

P1.

Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{x \in [0, \infty) \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$$

Cardinalidad

Demostración

Conjuntos Infinitos

P2.

Sean A, B, C tres conjuntos infinitos tales que:

$A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $|B| = |C|$.

- ¿Qué relación hay entre $|A \cup B|$ y $|A \cup C|$?
- ¿Y qué se puede decir si $|B| \leq |C|$?
- ¿Y si $A \cap B = \{x_0\}$?

En todos los casos, demuestra tus afirmaciones.

Conjuntos Infinitos

Demostración

Props

P3.

- Determine la cardinalidad del conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$.
- Demuestre que si X es infinito y $x \in X$ entonces $|X| = |X \setminus \{x\}|$.

Props

Demostración

Muchos conjuntos

P4.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A\}$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

Muchos conjuntos

Demostración