1. Demuestre que las siguientes relaciones son de equivalencia y determine las clases de equivalencia pedidas.

(a) $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dada por $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ ssi $a-a'=b-b'$. Determine la clase de equivalencia de $(0,n)$, para cada $n\in\mathbb{N}$.

(b) $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ dada por $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ ssi $ab'=a'b$. Determine la clase de equivalencia de $(-n,3)$, para cada $n\in\mathbb{N}$.

(c) $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ dada por $A\mathcal{R}B$ si $A\cap\mathbb{N}=B\cap\mathbb{N}$. Determine las clases de equivalencia de $\emptyset$, $\{0,1\}$ y $\mathbb{Z}$.

P2. Sean $n,m\in\mathbb{N}$ y sean A,B conjuntos tales que $|A|=n$, $|B|=m$ y $A\cap B=\emptyset$.

(a) Pruebe que $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j}=\sum_{i=0}^{n+m}\binom{m+n}{i}$.

(b) Pruebe que $|\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)|=|\mathcal{P}(A\cup B)|$.

(c) Encuentre una función biyectiva de $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A\cup B)$.

(d) Si se elimina la condición $A\cap B=\emptyset$, ¿sigue siendo cierto (b)? ¿la función de (c) sigue siendo biyectiva?

P3. Sea F el conjunto de todas las funciones $f:\{1,2,\ldots,k\}\to\{1,2,\ldots,n\}$.

(a) Determine $|F|$.

(b) Determine la cardinalidad del conjunto I de todas las funciones inyectivas en F.

(c) Determine la cardinalidad del conjunto B de todas las funciones biyectivas en F si $k=n$.

(d) Determine la cardinalidad del conjunto B de todas las funciones biyectivas en F si $k\neq n$.

P1/ a) R relación sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$(a,b)R(a',b') \Leftrightarrow a-a'=b-b'$. Det clase del $(0,n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

- refleja: $(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a-a=b-b$? Sí, pues $a-a=b-b=0$.

Sean $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ arbitrarios:

- transitiva: $\underbrace{(a,b)R(c,d)}_{\Leftrightarrow\, a-c=b-d\ (1)} \wedge \underbrace{(c,d)R(e,f)}_{c-e=d-f\ (2)}$ pdq $\underbrace{(a,b)R(e,f)}_{a-e=b-f}$

¿Cómo concluimos?

Sumamos (1) + (2) y nos queda: $(a-c)+(c-e)=(b-d)+(d-f)$

$a-e=b-f$

$\therefore$ $(a,b)R(e,f)$, es transitiva!

• Simétrica? $\underbrace{(a,b) R (c,d)}_{a-c=b-d} \Rightarrow \underbrace{(c,d) R (a,b)}$

$$a-c=b-d \quad / \cdot -1$$

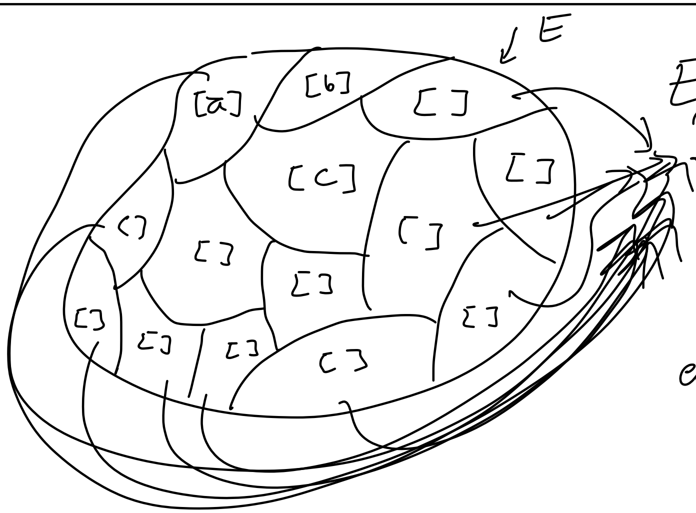
$$c-a=d-b \Rightarrow (c,d) R (a,b) \checkmark$$

$\Rightarrow$ Como R es refleja, simétrica y transitiva es de equivalencia. Sea $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ arbitrario:

$[(0,n)]_R$? $\quad (x,y) R (0,n) \iff \underline{x-0=y-n}$

¿ $x = y-n$? $\longrightarrow (y-n, y) R (0,n)$

$$[(0,n)]_R = \{(y-n, y) : y \in \mathbb{N},\ y \geq n\}$$



$$E/R = \{[a]_R \mid a \in E\}$$

$\overbrace{\text{el conjunto de todas las clases de equivalencia en } E \text{ producidas por } R.}$

(c) $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ dada por $A\mathcal{R}B$ si $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}$. Determine las clases de equivalencia de $\emptyset$, $\{0,1\}$ y $\mathbb{Z}$.

refleja: ARA? : $A \cap \mathbb{N} = A \cap \mathbb{N}$ ✓

sim.: $ARB \Rightarrow BRA$? : $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} \Rightarrow B \cap \mathbb{N} = A \cap \mathbb{N}$ ✓

trans: $ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$? : $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} \wedge B \cap \mathbb{N} = C \cap \mathbb{N}$

$$\Rightarrow A \cap \mathbb{N} = C \cap \mathbb{N}.$$

clase del $\emptyset$: $[\emptyset]_R$. $X R \emptyset$

$$\iff \underbrace{X \cap \mathbb{N}}_{?} = \emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset ?$$

$X \in P(\mathbb{Z}) \Rightarrow$ hay mas conjuntos que hacen esto además del vacío.

Si $X \cap \mathbb{N} = \emptyset \Rightarrow X \subseteq \mathbb{N}^c \to \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

$$[\emptyset]_R = \{ X \mid X \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \}$$

$$[\{0,1\}]_R \Rightarrow X \cap \mathbb{N} = \{0,1\} \cap \mathbb{N} = \{0,1\}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(X \cap \mathbb{N})}_{=\{0,1\}} \cup \underbrace{(X \cap \mathbb{N}^c)}_{\text{da lo mismo.}} = \{0,1\}$$

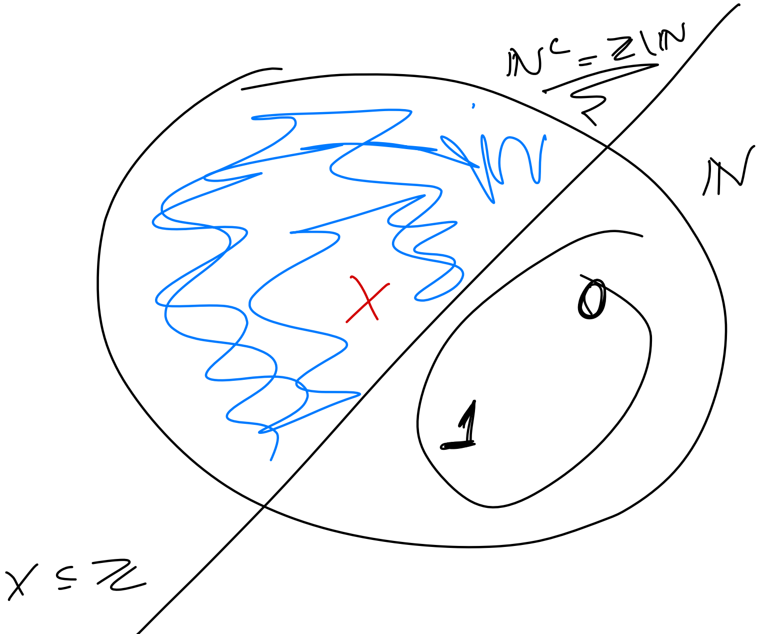
$\tilde{X} = X \cap \mathbb{N}^c$

$$[\{0,1\}]_R = \{ \tilde{X} \cup \{0,1\} \mid \tilde{X} \subseteq (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \}$$

$$[\mathbb{Z}]_R = X R \mathbb{Z} \iff X \cap \mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \underbrace{\mathbb{N}}_{\subseteq \mathbb{Z}} = \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow [\mathbb{Z}]_R = \{ X \cup \mathbb{N} : X \subseteq \mathbb{N}^c \}$$

¿Como sería $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R$?



Quiero que esto sea $\{0,1\}$

$$X = X\cap\mathbb{Z} = X\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \cup \mathbb{N})$$
$$= \underbrace{X\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})}_{\text{no hay restricción.}} \cup (X\cap\mathbb{N})$$

$$\to \quad X R \{0,1\} \iff X\cap\mathbb{N} = \underbrace{\{0,1\}\cap\mathbb{N}.}_{\{0,1\}}$$

$$X = \tilde{X} \cup \{0,1\} : \tilde{X} \subseteq \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$$

$$[\{0,1\}]_R = \{\tilde{X} \cup \{0,1\} : \tilde{X} \subseteq \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z})/R = \{[A]_R \mid A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$$

$\supseteq)$ $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \Rightarrow [A]_R \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})/R$

$[A]_R,\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$:

$\Rightarrow (A \cap \mathbb{N}) R A$ Con esto estamos, pues $A \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$.

$(A \cap \mathbb{N}) \cap \mathbb{N} = A \cap \mathbb{N}$? Sí, por asociatividad

$\Leftrightarrow A \cap \mathbb{N} \; R \; A$

$A \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$

$[A]_R = [A \cap \mathbb{N}]_R \in \{[A]_R \mid A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ //

P3. Sea F el conjunto de todas las funciones $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Determine $|F|$.

(b) Determine la cardinalidad del conjunto I de todas las funciones inyectivas en F.

(c) Determine la cardinalidad del conjunto B de todas las funciones biyectivas en F si $k = n$.

(d) Determine la cardinalidad del conjunto B de todas las funciones biyectivas en F si $k \neq n$.

$B^A = \{f : f \text{ función } f : A \to B\}$

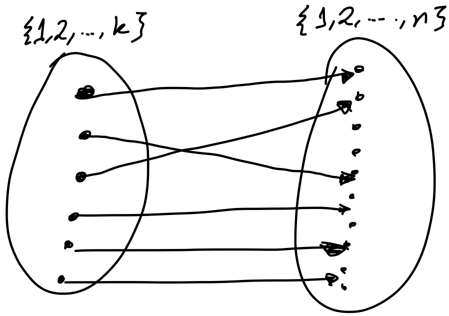
$|B^A| = |B|^{|A|}$

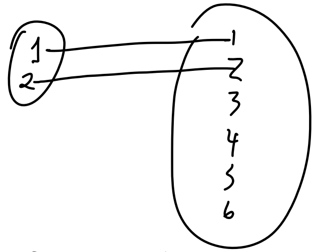
$\{1,2,\ldots,n\}^{\{1,2,\ldots,k\}} = \{f : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\} \mid f \text{ func.}\}$

a) $|F| = ? \to \left|\{1,2,\ldots,n\}^{\{1,2,\ldots,k\}}\right| = |\{1,2,\ldots,n\}|^{|\{1,2,\ldots,k\}|}$

$= n^k$ //

6) $|I| = ?$ $\quad I = \{ f : \{1,2,\dots,k\} \to \{1,2,\dots,n\} \mid f \text{ iny} \}$

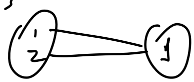




f iny $: A \to B$

$|A| \leq |B|$

¿ $n < k \Rightarrow f$ iny $: \{1,2,\dots,k\} \to \{1,2,\dots,n\}$?



1°: $n \geq k$.

para el 1er caso tengo n opciones.

2° caso " $n-1$ opciones

⋮

k - caso $\to$ $n-k+1$ opciones.

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k}$$

$B = \{ f$ biyect. si $k = n \} = n!$ $\quad k=n$

$\bar{B} = \{ f$ biyectivas si $k \neq n \} = ? = 0$

P2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sean A, B conjuntos tales que $|A| = n$, $|B| = m$ y $A \cap B = \emptyset$.

(a) Pruebe que $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j} = \sum_{i=0}^{n+m}\binom{m+n}{i}$.

(b) Pruebe que $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A \cup B)|$.

(c) Encuentre una función biyectiva de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$.

(d) Si se elimina la condición $A \cap B = \emptyset$, ¿sigue siendo cierto (b)? ¿la función de (c) sigue siendo biyectiva?

a) $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}}_{?}\Big)$$

Teo. de Binomio:

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\cdot 1^{j}\cdot 1^{m-j} = (1+1)^{m} = 2^{m}$$

Volviendo a la suma

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^{m} = 2^{m}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}}_{?}$$

Igual que antes:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{i}\cdot 1^{n-i} = (1+1)^{n} = 2^{n}$$

$$\to 2^{n}\cdot 2^{m} = 2^{n+m}$$

$=$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i}}_{?} = 2^{n+m}$$

---

b) Como A y B son finitos, $P(A), P(B)$ también. $\rightarrow$ $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$!!

$|P(A) \times P(B)| = ?$

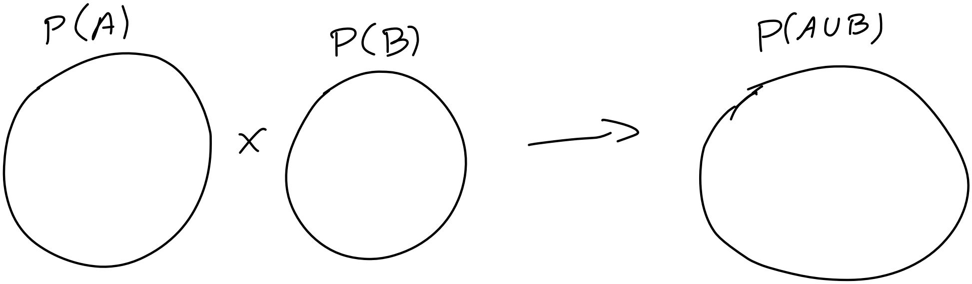
$= |P(A)| \cdot |P(B)| = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$

$|P(X)| = 2^{|X|}$ (X finito) $\leftarrow$ créame uwu

$|P(A \cup B)| =$ Como A y B son disjuntos

$|A \cup B| = \underbrace{|A| + |B|}_{n+m} - \underbrace{|A \cap B|}_{0}$

$\Rightarrow |P(A \cup B)| = 2^{|A \cup B|} = 2^{n+m}$



$X \subseteq A \qquad Y \subseteq B \longrightarrow ?$

$f(X,Y) \longrightarrow \text{algo} \in P(A\cup B)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad X \cup Y$

iny: $f(X,Y) = f(X',Y') \Rightarrow X = X' \wedge Y = Y'$.

$X\cup Y = X'\cup Y' \;/\cap A \Rightarrow (X\cup Y)\cap A = (X'\cup Y')\cap A$

$\Rightarrow \underbrace{(X\cap A)}_{X} \cup \cancelto{\emptyset}{(Y\cap A)} = \underbrace{(X'\cap A)}_{X'} \cup \cancelto{\emptyset}{(Y'\cap A)} \Rightarrow X = X'$

Analogo con Y, Y' y B.

epi?: Sea $X \in P(A\cup B)$ $\quad \exists\, (Y,Z)$ tq $f(Y,Z) = X$?

$$X = X\cap(A\cup B)$$

$$= \underbrace{(X\cap A)}_{\in P(A)} \cup \underbrace{(X\cap B)}_{\in P(B)} \Rightarrow f(\overset{Y}{\overset{\|}{X\cap A}}, \overset{Z}{\overset{\|}{X\cap B}}) = X$$

d) Si $A \cap B \neq \emptyset$, se conserva lo anterior?

SPOILER: NO.

$$|P(A \cup B)| = 2^{|A \cup B|} = 2^{|A| + |B| - \underbrace{|A \cap B|}_{\geq 1}} < 2^{|A| + |B|} = 2^{m+n}$$

$$\Rightarrow |P(A) \times P(B)| \neq |P(A \cup B)|$$

Luego, no pueden haber funciones bijectivas entre $P(A) \times P(B)$ y $P(A \cup B)$.

<u>Prop</u>: Identidad de Pascal:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$