

MA1101 - Introducción al Álgebra

Auxiliar 7

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

9 de Junio de 2020

Resumen

Relaciones

¿Qué es una relación? La definición formal es:

Una tripleta de conjuntos $(A, B, \mathcal{R})$ es una relación si cumple $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Para $(a, b) \in A \times B$, denotaremos $a\mathcal{R}b$ cuando $(a, b) \in \mathcal{R}$, y $a\not\mathcal{R}b$ cuando $(a, b) \notin \mathcal{R}$.

El conjunto A se llama el dominio de la relación y el conjunto B el codominio. Comúnmente, para hablar de esto, diremos que $\mathcal{R}$ es relación sobre $A \times B$.

Resumen

Relaciones

En otras palabras, es como una función, pero más libre. No exige que cada elemento en el dominio tenga un único elemento con el que se relaciona en el codominio.

Para efectos del curso, asumiremos que las relaciones aquí se trabajan en $A \times A$. Diremos que $\mathcal{R}$ es entonces una relación sobre A (en vez de decir sobre “ A cruz A ”)

Resumen

Se dice que la relación $\mathcal{R}$ en A :

- es **Refleja** si $(\forall x \in A, x\mathcal{R}x)$
- es **Simétrica** si $\forall x, y \in A (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$
- es **Antisimétrica** si $\forall x, y \in A (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$
- es **Transitiva** si $\forall x, y, z \in A (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

$\mathcal{R}$ será relación de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Orden Total: Diremos que la relación de orden $\mathcal{R}$ es *orden total* si $\forall x, y \in A$, x, y son comparables. (Esto es, para cualesquiera x, y , tenemos $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.)

Resumen

Relación de Equivalencia: $\mathcal{R}$ será relación de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva.

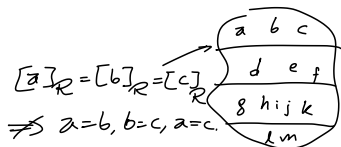
Clase de Equivalencia: dado un elemento $a \in A$, definimos la *clase de equivalencia de a asociada a $\mathcal{R}$* como el conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\} \subseteq A \quad [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \not\Rightarrow a=b$$

Conjunto Cuociente: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le llama *conjunto cuociente*, y se denota $A/\mathcal{R}$.

$$\text{i.e. } A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

Resumen



Prop. Una propiedad muy potente es la siguiente

$$[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$$

Prop. Para toda relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A , el conjunto $A/\mathcal{R}$ es una *partición* de A . (Recordar la idea de partición)

Relaciones

P1.

Sea E un conjunto no vacío y $K \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ de la siguiente forma: $A, B \subseteq E$:

$$A\mathcal{R}_KB \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B$$

- Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es reflexiva y transitiva. ✓ ✓
- Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es una relación de orden ssi $K = E$

Demostración:

• $\mathcal{R}_K$ es reflexiva: Sea $X \in \mathcal{P}(E)$: $X\mathcal{R}_K X$:

$\Leftrightarrow X \cap K \subseteq X$ ¿Esto es cierto? ¡Sí!

Porque $X \cap A \subseteq X \quad \forall A$.

Problemas

Demostración . R_k es transitiva: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$
 $\underbrace{X R_k Y}_{1)}, \underbrace{Y R_k Z}_{2)}$ nos gustaría que $\underbrace{X R_k Z}_{3)}$.

1) $X \cap K \subseteq Y$ ↗
2) $Y \cap K \subseteq Z$ ↘ ¿Cómo junto 1) y 2)
para formar 3) ?

3) (yo quiero esta) $X \cap K \subseteq Z$
↓

Por 1): $X \cap K \subseteq Y$ / $\cap K$ a ambos lados

$$(X \cap K) \cap K \subseteq Y \cap K$$

Problemas

Demostración

$$(X \cap K) \cap K = X \cap (K \cap K) = X \cap K$$

entonces: $(X \cap K) \cap K \subseteq Y \cap K$

$$\Leftrightarrow X \cap K \subseteq Y \cap K$$

Por 2) $Y \cap K \subseteq Z$

$$\Rightarrow X \cap K \subseteq Y \cap K \subseteq Z$$

$$\Rightarrow X \cap K \subseteq Z.$$

Luego, R_K es reflexiva y transitiva.

Problemas

- Demuestre que R_K es una relación de orden ssi $K = E$

Demostración

$$\Leftarrow \text{ Si } K = E: A R_K B \Leftrightarrow A \cap E \subseteq B \\ A \subseteq B$$

- Basta demostrar que R_K es antisimétrica;

Sean $A, B \subseteq E$:

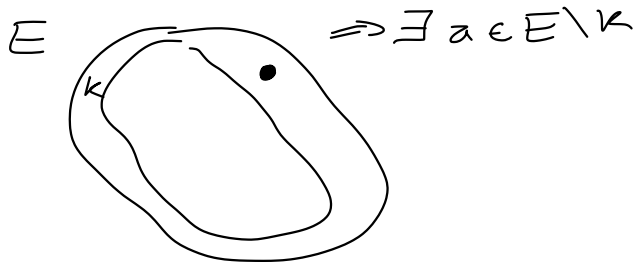
$$\underbrace{A R_K B} \wedge \underbrace{B R_K A} \stackrel{!}{\Rightarrow} A = B$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B.$$

Por lo tanto, R_K es relación de orden.

Problemas

Demostración $\Rightarrow$ Si R_K es relación de orden
entonces $E=K$. (Procederemos por contrarrecíproca)
 $\forall A, B \subseteq E: A R_K B \wedge B R_K A \Rightarrow A=B$.
Supongamos entonces que $K \neq E$. ($K \subseteq E$)



Problemas

 $\exists A, B \in \mathcal{P}(E):$

Demostración

$$\underbrace{A R_K B \wedge B R_K A}_{\checkmark} \Rightarrow \underbrace{A=B}_F$$

$$\underbrace{A \cap K \subseteq B}_{\checkmark} \wedge \underbrace{B \cap K \subseteq A}_{\checkmark} \wedge \underbrace{A \neq B}_{\text{red circle}}$$

Podemos tomar los conjuntos $A=K, B=E$:

- $K \cap K \subseteq E$? Sí, porque $K \subseteq E$ por enunciado.
- $E \cap K \subseteq K$? Sí, porque $E \cap K = K \subseteq K$.
- $E = K$? No, supusimos que no. Luego,

$A R_K B \wedge B R_K A \not\Rightarrow A=B$. Luego, E debe ser igual a K .

Relaciones

P2.

Sea $K \subseteq \mathbb{Q}$ no vacío y $\mathcal{R}_K$ la relación en K definida por:

$$x\mathcal{R}_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

- Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja si y solo si $0 \in K$.
 - Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ es una relación de orden.
 - Demuestre que $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia y encuentre la clase de equivalencia de $1/2$.
- $\mathcal{R}_K$ es refleja $\Leftrightarrow \forall x \in K : x - x \in K$
 $\Leftrightarrow \forall x \in K : 0 \in K$
 $\Leftrightarrow 0 \in K$ ✓

Problemas

$$x R_K y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Demostración. R_N es relación de orden.

- Refleja? Sí, porque $0 \in \mathbb{N}$. (y la parte anterior)
- Transitiva? $x, y, z \in \mathbb{N} : x R_N y \wedge y R_N z \Rightarrow x R_N z$

Asumiendo el lado izquierdo verdadero:

$y - x \in \mathbb{N} \wedge z - y \in \mathbb{N}$. Nosotros queremos que $z - x \in \mathbb{N}$. ¿Cómo verificamos eso?

$(y - x) + (z - y) = z - x \in \mathbb{N}$ por ser cerrados para la suma $\Rightarrow x R_N z$.

Problemas

Demostración

Sean $x, y \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{x R_{\mathbb{N}} y}_{y-x \in \mathbb{N}} \wedge \underbrace{y R_{\mathbb{N}} x}_{x-y \in \mathbb{N}} \stackrel{!}{\Rightarrow} x = y$$

- $y-x \geq 0 \wedge x-y \geq 0 \Rightarrow x=y \checkmark$
 $y \geq x \wedge x \geq y$
- $(y-x) + (x-y) = 0, y-x, x-y \in \mathbb{N} \Rightarrow y-x=0$
 $x-y=0$
 $\Rightarrow x=y.$

Luego, como $R_{\mathbb{N}}$ es reflexiva, transitiva
y antisimétrica $\Rightarrow$ es de orden. ~

Problemas

Demostración

 $R_{\mathbb{Z}}$ es relación de equivalencia.

- $R_{\mathbb{Z}}$ es reflexiva? Sí, porque $0 \in \mathbb{Z}$.
- $R_{\mathbb{Z}}$ es transitiva? Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\underbrace{x R_{\mathbb{Z}} y} \wedge \underbrace{y R_{\mathbb{Z}} z} \Rightarrow x R_{\mathbb{Z}} z$$

$$y - x \in \mathbb{Z} \wedge z - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow z - x \in \mathbb{Z} \text{ por ser } \mathbb{Z} \text{ cerrado p.a. la suma.}$$

$R_{\mathbb{Z}}$ es simétrica? Sean $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\underbrace{x R_{\mathbb{Z}} y} \Rightarrow y R_{\mathbb{Z}} x \quad \{ \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

$$y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(y - x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y R_{\mathbb{Z}} x$$

Luego, $R_{\mathbb{Z}}$ es reflexiva, sim y trans. $\Rightarrow$ es de equiv.

Problemas

Demostración

Relaciones

$$((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \mathcal{R})$$

P3.

Sea $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $(p, q)\mathcal{R}(p', q')$ si existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $p - p' = 4r$ y $q - q' = 5s$

- Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- Demuestre que el conjunto cociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{R}$ tiene 20 elementos y dé representantes para cada clase de equivalencia.
- Reflexiva: $(p, q)\mathcal{R}(p, q) \Leftrightarrow p - p = 4r, q - q = 5s$
 $r, s \in \mathbb{Z}.$

tomando $r = s = 0$, se cumple y por lo tanto $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Problemas

Demostración

• R es transitiva? (p, q)
 (p', q')
 (p'', q'')

$$(p, q) R (p', q') \wedge (p', q') R (p'', q'') \Rightarrow (p, q) R (p'', q'')$$

$$\exists r, s \in \mathbb{Z}.$$

$$p - p' = 4r$$

$$q - q' = 5s$$

$$\exists r', s' :$$

$$p' - p'' = 4r'$$

$$q' - q'' = 5s'$$

sumando:

$$(p - \cancel{p'}) + (\cancel{p'} - p'') = p - p'' = 4(\underbrace{r + r'}_{\in \mathbb{Z}}) \quad (p, q) R (p'', q'')$$

$$(q - \cancel{q'}) + (\cancel{q'} - q'') = q - q'' = 5(\underbrace{s + s'}_{\in \mathbb{Z}})$$

Problemas

Demostración Faltaba ver que R es simétrica.

Sean $(p, q), (p', q')$ t.q.: $(p, q) R (p', q')$ } ?

$\Rightarrow p, q: (p', q') R (p, q):$

? $p - p' = 4r \wedge q - q' = 5s \quad (r, s \in \mathbb{Z})$

Lo que queremos es que $\exists r', s':$

$$p' - p = 4r' \wedge q' - q = 5s'.$$

Basta ver que con $r' = -r \wedge s' = -s$ se tiene lo pedido

Problemas

Demostración Así, R es reflexa, trans. y sim.

$\Leftrightarrow R$ es de equivalencia.

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R = \{ [(p, q)]_R \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \}$$

$$[(0, 0)]_R = \{ (p, q) \mid \underbrace{(0, 0) R (p, q)} \}$$

$$\exists r, s \in \mathbb{Z}: \begin{array}{l} 0 - p = 4r \\ 0 - q = 5s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p = -4r \\ q = -5s \end{array}$$

$$[(1, 2)]_R = \{ (p, q) \mid (1, 2) R (p, q) \}$$

$$\exists r, s \in \mathbb{Z}: \begin{array}{l} 1 - p = 4r \\ 2 - q = 5s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p = 1 - 4r \\ q = 2 - 5s \end{array}$$

Problemas

$$(p, q) R (p', q') \Leftrightarrow \begin{cases} p - p' = 4r \\ q - q' = 5s \end{cases}$$

Demostración $\dot{?} (20, 1) R (0, 1) ?$

$$20 - 0 = 20 = 4 \cdot 5$$

$$1 - 1 = 0 = 5 \cdot 0.$$

$\dot{?}$ Por qué $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / R$ tiene 20 elementos?

$$p - 4r = p' \quad \wedge \quad q - 5s = q'$$

$$0 = 4 \cdot 0 + 0$$

$$1 = 4 \cdot 0 + 1$$

$$2 = 4 \cdot 0 + 2$$

$$3 = 4 \cdot 0 + 3$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

$$6 = 4 \cdot 1 + 2$$

$$\vdots$$

Hay 4 posibles
restos al dividir x 4
y si $(p, q) R (p', q')$
entonces p y p' deben
tener el mismo.

Problemas

Demostración Del mismo modo, para p y p' hay 5 posibles restos al dividir por 5 y p, p' deben tener el mismo:

Si no fuese así:

$$p = 4n + p \quad (p \in \{0, 1, 2, 3\}, n \in \mathbb{Z})$$

$$p' = 4n' + p' \quad (p' \in \{0, 1, 2, 3\} \setminus p \wedge n' \in \mathbb{Z})$$

$$p - p' = 4n + p - 4n' - p' = \underbrace{4(n - n')} + \underbrace{(p - p')}_{\neq 0}$$

$$p - p' \geq 4 \Rightarrow p' \leq p - 4 < 0 \quad * \Rightarrow p = p'.$$

Problemas

Demostración Como tenemos 4 distintos casos en la primera componente y 5 en la segunda. Al obtener los casos totales tendremos que multiplicar.

$$4 \cdot 5 = 20. \left\{ \begin{array}{l} [(0,0)], [(1,0)], [(2,0)], [(3,0)] \\ [(0,1)], [(1,1)], [(2,1)], [(3,1)] \\ [(0,2)], [(1,2)], [(2,2)], [(3,2)] \\ [(0,3)], [(1,3)], [(2,3)], [(3,3)] \\ [(0,4)], [(1,4)], [(2,4)], [(3,4)] \end{array} \right\}$$

Sumatorias

P4.

Calcule (ojalá usando alguna propiedad interesante) la siguiente suma

$$\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1) = \sum_{k=1}^{n-3} ((k+2)-2)((k+2)+1)$$

Handwritten notes: Red arrows point from -2 to $n-3$ and from -2 to 1 with a question mark.

$$= \sum_{k=1}^{n-3} k \cdot (k+3)$$

Cambio de índice:
Si aplico una suma o resta a cada k dentro de la suma, hago lo opuesto en el índice.

Problemas

Demostración

$$\sum_{k=1}^{n-3} k(k+3) = \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + 3k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-3} k^2 + \sum_{k=1}^{n-3} 3k = \frac{(n-3)(n-3+1)(2(n-3)+1)}{6} + 3 \sum_{k=1}^{n-3} k$$

$$\star \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\star \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n-3)(n-3+1)(2(n-3)+1)}{6}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(n-3)(n-3+1)}{2}$$

Problemas

Demostración