MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar Extra

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

2 de Junio de 2020

Lógica

p_1 F
p_2 V
p_3 V
p_4 F
p_5
p_6

P1.

Tenemos que la siguiente proposición es una contradicción.

$$\underbrace{((p_3 \Leftrightarrow \overline{p_5}) \wedge (p_5 \vee p_1 \vee p_6))}_{V} \Rightarrow \underbrace{((p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee \overline{p_3} \vee (\overline{p_4} \Rightarrow p_1))}_{F}$$

Halle los valores de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6.

Mirando el lado derecho:

$(p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee \overline{p_3} \vee (\overline{p_4} \Rightarrow p_1)$ es F, como son todos los conectores lógicos necesariamente cada uno es falso.

- $(p_1 \Leftrightarrow p_2)$ es F, como p_1 es F, p_2 es V.
- $\overline{p_3}$ es F $\Leftrightarrow$ p_3 es V.
- $(\overline{p_4} \Rightarrow p_1)$ es F $\Leftrightarrow$ $\overline{p_4}$ es V $\wedge$ (p_1 es F) $\Leftrightarrow$ ($p_4 \Leftrightarrow$ F) $\wedge$ ($p_1 \Leftrightarrow$ F)

Problemas

Demostración $((p_3 \Leftrightarrow \overline{p_5}) \wedge (p_5 \vee p_1 \vee p_6)) \Leftrightarrow V$

P_1	F
P_2	V
P_3	V
P_4	F
P_5	F
P_6	V

Como esta expresión está conectada con un $\wedge$, sabemos que cada una de las componentes es verdadera por sí sola.

- $P_3 \Leftrightarrow \overline{P_5}$ es V, $\overline{P_5}$ es V porque P_3 es V. Luego, P_5 es F.
- $P_5 \vee P_1 \vee P_6$ es V, finalmente, como P_1 y P_5 son falsos, necesariamente, P_6 será V.

Hallando los valores de verdad de $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$

Cuantificadores

P2.a)

Exprese lo siguiente como una proposición cuantificada:

$\in\mathbb{R}$ $\in\mathbb{R}$

"Hay un número x tal que cuando se le suma cualquier número, el resultado es ese número, y que si es multiplicado por cualquier número, el resultado es x."

$\in\mathbb{R}$

$$\left(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} : x + y = y \wedge x \cdot z = x\right)$$

Problemas

Demostración

Cuantificadores

P2.b)

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

F 1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = x^2$

F 2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq x^2$

V 3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq x^2$

5. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \leq x^2$

1) Si existiera tal x : $(y_1 \neq 0)$

Tomamos un y_1 en $\mathbb{R}$ y $1000y_1$ ($\in$ en $\mathbb{R}$)

Luego, por el supuesto:

$$y_1 = x^2 = 1000 y_1 \;/\; y_1 \neq 0$$

$$\cancel{y_1} = 1000 \cancel{y_1}$$

$$1 = 1000 \quad \times$$

2) Si existiera tal $x \Rightarrow x^2 = \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R} \Rightarrow y = x^2$ es

efectivamente $y \in \mathbb{R}$ tq $y = x^2$

$\forall x, \exists y \quad p(x,y)$ $\not\Leftrightarrow$

$\exists y, \forall x \quad p(x,y)$

Problemas

$p(x,y)$: x quiere a y.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq x^2$ V

Demostración

5. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \leq x^2$ V

¿6. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \leq x^2$? V

4) i) $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos considerar $y = -1$. Entonces, $y \leq x^2$ será cierto pues $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Luego, $x^2 \geq -1 = y$ ✓

ii) Ya sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$. Luego, tomando el mismo y, $y \leq x^2$.

5) Aquí, podemos tomar $y = -1$. Luego:

$y \leq 0 \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \Rightarrow y \leq x^2$ ✓

Problemas

$y \longrightarrow$ dado. $\Rightarrow \exists x, \ y \le x^2$

Demostración

Tomando $x = \sqrt{|y|}$; $y+1$

$\max\{y, -y\}$ / y^2

$x^2 = |y|$

y sabemos que $y \le |y|$. Luego, tenemos el result.

Qué pasa con $x = y^2$? $y = 1/2$?

$x = (1/2)^2 = 1/4 \Rightarrow$ ¿ $y \le x^2$? $\rightarrow 1/2 \le 1/4$ $\times$

¿$x = y+1$?, Sí, sirve. $y \le 0$ es directo pues $x^2 \ge 0$.

$y > 0 \Rightarrow y \le (y+1)^2 \rightarrow y \le y^2 + 2y + 1 \Rightarrow y^2 + y + 1 \ge 0$ ✓

$y > 0$

Inducción

P3.a)

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2$, $f_1 = 2a$ y $\forall n \geq 0,\ f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \geq a^n + b^n$

P3.b)

Demuestre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

P3.c)

Demuestre que (para un $p \geq 1$ fijo) $n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1)$ es divisible por p ,$\forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Inducción

Demostración

P3.a)

Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2$, $f_1 = 2a$ y $\forall n \geq 0$, $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq a^n + b^n$

$f_2, f_3, \ldots,$

f_0, f_1

inducción

$f_2 \longrightarrow$ (aquí, la recurrencia es válida siempre.

$f_0: \quad f_0 \geq a^0 + b^0 = 2$ ✓

$f_1: \quad 2a = f_1 \geq a^1 + b^1$ ✓ (ya sabemos, por hipótesis que $a \geq b \Rightarrow 2a \geq a + b$. Luego, $f_1 \geq a^1 + b^1$)

$(a \geq b)$

Inducción

$n \geq 0$ $\quad f_{n+2} = a f_{n+1} + b f_n$

$n \geq 1$ $\quad f_{n+1} = a \cdot f_n + b f_{n-1}$

Demostración

C. B. $f_2 = a \cdot f_1 + b \cdot f_0$

$f_2 \overset{?}{\geq} a^2 + b^2$ Veamos que sí:

$f_2 = a \cdot 2a + b \cdot 2 \geq 2a^2 = a^2 + a^2 \geq a^2 + b^2$

($a \geq b \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 \geq b^2$)

H.I. $f_n \geq a^n + b^n$.

$f_{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$

¿$f_n \neq a^n + b^n$?

$f_n \geq a^n + b^n$ ✓✓

Sabemos que:

$$f_{n+1} = \underbrace{a \cdot f_n} + \underbrace{b \cdot f_{n-1}}$$

(inducc. fuerte)

por H.I. $\geq \underline{a \cdot (a^n + b^n)} + b \cdot (a^{n-1} + b^{n-1}) \rightarrow \geq 0$

$\geq a \cdot (a^n + b^n) + 0 = a^{n+1} + ab^n$

Inducción

Demostración Nos gustaría que $a6^n \geq 6^{n+1}$

Porque así: $f_{n+1} \geq a^{n+1} + a6^n \geq a^{n+1} + 6^{n+1}$ y gano.

$\cancel{a6^n \geq 6^{n+1}} \iff \boxed{a \geq 6}$ $(a, 6 \neq 0,\ 6 \geq 0)$

$\therefore\ f_{n+1} \geq a^{n+1} + 6^{n+1}$ concluyendo $\forall n \geq 2$ que $f_n \geq a^n + 6^n$. Como demostramos que f_0 y f_1 también cumplen, llegamos a lo pedido.

Inducción

P3.b)

Demuestre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Demostración

Por inducción:

C.B. $1 = 1$ ✓

H.I. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$. *

PDQ:
(P.I.) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$

Por H.I: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

sumando $2n+1$ a ambos lados:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + \underline{(2n+1)} = n^2 + 2n + 1$
$= (n+1)^2$

pero $2n+1 = (2(n+1) - 1)$, hallando lo pedido

$2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$ «

Inducción

Demostración

P3.c)

Demuestre que (para un $p \geq 1$ fijo) $\overbrace{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1)}^{p \text{ números.}}$ es divisible por p ,$\forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

p fijo $\in \mathbb{N}$, ≥ 1.

C.B.) $n=1$) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p$ es divisible por p

$= p \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p-1)}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow$ es divisible por p.

H.I.) $n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1)$ es divisible por p.

pdq)

P.I. $(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p-1) \cdot \underbrace{((n+1)+p-1)}_{n+p}$ es div. por p.

Inducción

Demostración H.I.) $n\cdot\overbrace{[(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+p-1)]}^{q}$ es divisible por p.

$+\,p\cdot[(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p-1)] = (n+p)\,q$

la suma de cosas divisibles por p también es divisible por p.

$= (n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p-1)[n+p]$

$= (n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+p-1)((n+1)+p-1)$

Concluimos por inducción.

Conjuntos

$A \subseteq A^c / \cap A$

$\Rightarrow \underline{A \subseteq \emptyset} \Rightarrow \underline{A = \emptyset}.$

P4.

Demuestre que:

- $A \subseteq A^c \Rightarrow A = \emptyset$
- $(A \cap B^c) \cup A = A$
- $(A \triangle B) \cup (A^c \cap B^c)^c = A \cup B$

Supongamos que $A \neq \emptyset$. existe un $a \in A$. Luego, $a \notin A^c$.

$a \in A \Leftrightarrow a \notin A^c$

Por hipótesis: $a \in A \Rightarrow a \in A^c$ $(A \subseteq A^c)$

Como $a \in A$ y $a \in A^c$,

$a \in A \cap A^c \Rightarrow a \in \emptyset$

$\times$ Luego, no existe tal a y $A = \emptyset$.

$(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$

Funciones y Conjuntos

Demostración $\underbrace{(A \cap B^c)}_{\subseteq A} \cup A = A$

Sea $x \in A \cap B^c \Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c$

en particular $\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow (A \cap B^c \subseteq A)$

$\supseteq]$ $A \cup (A \cap B^c) \supseteq A$, Sea $x \in A$

$\Rightarrow x \in A \vee x (A \cap B^c) \Rightarrow (A \subseteq A \cup (A \cap B^c))$

$\subseteq]$ Sea $x \in (A \cap B^c) \cup A = (A \cup A) \cap (A \cup B^c)$

$= A \cap (A \cup B^c)$

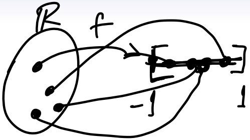
$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (A \cup B^c) \Rightarrow x \in A \; ((A \cap B^c) \cup A \subseteq A)$

$f(x) = 1 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) \subseteq [-1, 1]$

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

$f(\mathbb{R}) = \{1\}.$



Funciones

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

$f(\mathbb{R}) \subseteq [-1, 1]$

$f(\mathbb{R}) \supseteq [-1, 1]$

P5.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

- Es f inyectiva? NO
- Mostrar que el recorrido de f es $[-1, 1]$
- Mostrar que $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ es biyectiva.

$\forall x \in [-1, 1] : g(x) = f(x).$

a) Sean x_1, x_2 tal que $f(x_1) = f(x_2)$ ($\overset{\text{me gustaría}}{\Rightarrow}$ $x_1 = x_2$)

$$\frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2}$$

Funciones y Conjuntos

Demostración $\dfrac{2x_1}{1+x_1^2} = \dfrac{2x_2}{1+x_2^2} \Rightarrow$

$2x_1(1+x_2^2) = 2x_2(1+x_1^2) \Rightarrow 2x_1 + 2x_1x_2^2 = 2x_2 + 2x_1^2x_2$

$x_1 + x_1x_2^2 = x_2 + x_1^2x_2$, supongamos que $x_1 \neq x_2$. $(x_1 - x_2 \neq 0)$

$x_1 - x_2 = x_1^2x_2 - x_1x_2^2$

$\cancel{x_1 - x_2} = x_1x_2\cancel{(x_1 - x_2)}$

$1 = x_1x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{1}{x_2}}$

$f(1/2) = \dfrac{2 \cdot 1/2}{1 + 1/4} = 4/5$

$f(2) = \dfrac{4}{1+4} = 4/5$

No es inyectiva

Funciones y Conjuntos

b)

Demostración Sea $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = y$:

$$y = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y + yx^2 = 2x$$

$$yx^2 - 2x + y = 0.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot y \cdot y}}{2 \cdot y} \Rightarrow \quad y?$$

$$4 - 4y^2 \geq 0$$

$$1 \geq y^2 \Rightarrow y \in [-1, 1]$$

Funciones y Conjuntos

Demostración Sea $y \in [-1,1]$ arbitrario, veamos que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

$$y = \frac{2x}{1+x^2} \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot y \cdot y}}{2 \cdot y}$$

$$f(x) = y \longrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

(salvo $y=0$)

para $y \in [-1,1] \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$. y esta bien definido porque $4 - 4y^2 \geq 0$. Luego, este x existe $\forall y \in [-1,1]$ salvo $y=0$. ¿$f(x) = 0$?

Funciones y Conjuntos

Demostración Tal x es 0. $\frac{2x}{1+x^2} = 0$
$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Luego $f(0) = 0$
y encontramos al menos una preimagen
para cada $y \in [-1, 1]$. $[-1, 1] \subseteq rec(f)$.
Luego $rec(f) = [-1, 1]$.

Funciones y Conjuntos

c)

Demostración

Mostrar que $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $g(x) = f(x)$ es biyectiva.

Iny: $1 = x_1 x_2$ (Siguiendo exactamente la misma demostración de la primera parte hasta este punto)

Supongamos que son distintos $\Rightarrow$ Tenemos dos casos:

$x_1, x_2 \geq 0$: $x_1 = \frac{1}{x_2}$, pero $x_2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} \geq 1$

$\Rightarrow x_1 \geq 1$

Pero $x_1 \in [-1, 1] \Rightarrow x_1 = 1$. Pero entonces $x_2 = 1$

$\rightarrow x_1 = x_2$.

Funciones y Conjuntos

Demostración

El otro caso: $x_1, x_2 < 0$. Luego, $x_1 = \frac{1}{x_2}$, como

$x_2 > -1 \Rightarrow 1 < \frac{-1}{x_2}$, pero entonces $x_1 = \frac{1}{x_2}$

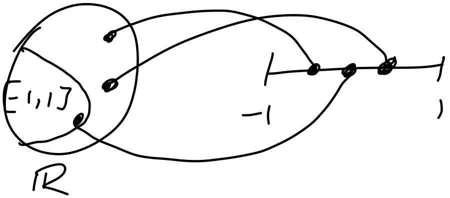
$$-x_1 = \frac{-1}{x_2} > 1$$

$\Rightarrow \boxed{x_1 < -1}$ —x— pues $x_1 \in [-1, 1]$

Finalmente, $x_1 = x_2$ y g es inyectiva.

Funciones y Conjuntos

Demostración



$$f([-1,1]) \subseteq f(\mathbb{R}) = [-1,1]$$

$$[-1,1] \subseteq f([-1,1])$$

$$y \text{ arb.} \longrightarrow f(x)$$

Funciones y Conjuntos

$\forall y \in [-1,1]$

Demostración $\exists x \in [-1,1] : f(x) = y$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \begin{cases} \nearrow \dfrac{2 + \sqrt{4-4y^2}}{2y} \\ \searrow \dfrac{2 - \sqrt{4-4y^2}}{2y} \end{cases}$$

$$= \frac{\cancel{2} \pm \cancel{\sqrt{4}}\sqrt{1-y^2}}{\cancel{2}y} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$$

Si x viviera en $[-1,1] \Rightarrow |x| \leq 1$

me gustaría que $\left|\dfrac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}\right| \leq 1$

Funciones y Conjuntos

Demostración

$$\left|\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right| = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{|y|} \overset{!}{\leq} 1$$

$1-\sqrt{1-y^2} \geq 0$ ← es cierto.

$1 \geq \sqrt{1-y^2} \quad /()^2$

$\cancel{1} \geq \cancel{1} - y^2$

$y^2 \geq 0$ ✓

$$1 - \sqrt{1-y^2} \leq |y|$$

$1-|y| \leq \sqrt{1-y^2} \quad /()^2$

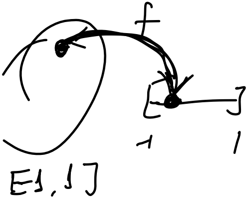
$\cancel{1} - 2|y| + y^2 \leq \cancel{1} - y^2$

$\cancel{2}y^2 \leq \cancel{2}|y|$

$y^2 \leq |y|$

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1,1]$$

$\Rightarrow g$ es epiy.



$\therefore g$ es biy.

Funciones y Conjuntos

Demostración

$f \circ g$ es epiy $\Rightarrow$ f es epiy

$f \circ g$ es iny $\Rightarrow$ g iny

$f \circ g$ es biy $\Rightarrow$ f es epiy y g iny.

epin

$Id_A(x) = x \quad x \in A$

Funciones y Conjuntos

P6.

Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$. Sean además $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in C \end{cases}$$

- Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.
- Demuestre que si f, g son epiyectivas, entonces h es epiyectiva.
- Si f, g son biyectivas, demuestre que h es biyectiva y encuentre su inversa.

Funciones y Conjuntos

Demostración Sean x_1, x_2 tales que $h(x_1) = h(x_2)$

Funciones y Conjuntos

P7.

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera y $A \subseteq E$, con $A \neq \emptyset$. Se define

$$\begin{aligned} f :& \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ & X \to f(X) = X \setminus A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :& \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ & X \to g(X) = X \cup A \end{aligned}$$

- Demuestre que $f \circ g = f$ y que $g \circ f = g$
- Demuestre que $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(A)$
- Demuestre que $\forall X \in \mathcal{P}(E), f(X) \neq A$

$X^c = E \setminus X$.

Funciones y Conjuntos

Demostración

Sea $X \in \mathcal{P}(E)$:

$f(g(X)) = f(X \cup A) = (X \cup A) \setminus A$

$f(X) = X \setminus A$

$(X \cup A) \setminus A = (X \cup A) \cap A^c = (X \cap A^c) \cup \underbrace{(A \cap A^c)}_{\emptyset}$

$= X \cap A^c = X \setminus A$.

$g \circ f = g$: $g(f(X)) = g(X \setminus A) = (X \setminus A) \cup A$

$g(X) = X \cup A$. $(X \setminus A) \cup A = (X \cap A^c) \cup A$

$= (X \cup A) \cap \underbrace{(A^c \cup A)}_{E} = X \cup A$.

Funciones y Conjuntos

Demostración

$$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(A)$$

$\subseteq$) $f(X) = X \setminus A = \emptyset$

$$X \setminus A = \emptyset \Rightarrow X \subseteq A \checkmark \qquad f^{-1}(\{\emptyset\}) \subseteq \mathcal{P}(A)$$

$\supseteq$) Sea $X \subseteq A$ $(\in \mathcal{P}(A))$ $\Rightarrow f(X) = X \setminus A \subseteq A \setminus A = \emptyset$

$$\Rightarrow X \in f^{-1}(\{\emptyset\})$$

Funciones y Conjuntos

Demostración $\forall X \in \mathcal{P}(E) : f(X) \neq A$, supongamos que no:

$$f(X) = X \setminus A = A$$

$$X \cap A^c = A \quad / \cap A$$

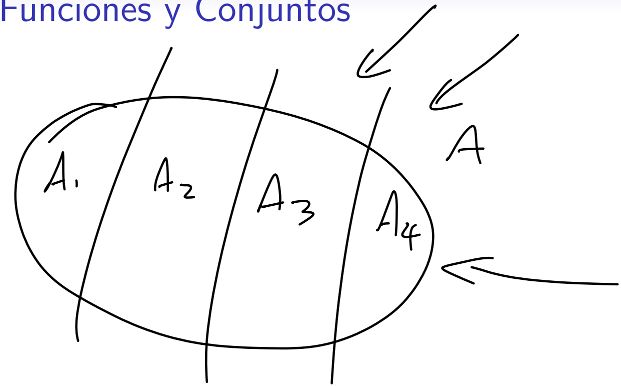
$$\underbrace{X \cap A^c \cap A}_{\emptyset} = A \cap A$$

$\Rightarrow \emptyset = A$, pero por hip

$A \neq \emptyset \Rightarrow X$ no existe

Funciones y Conjuntos

Demostración



$A_i \subseteq A$.

$A_i \neq \phi$.

$\bigcup A_i = A \rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$

$A_i \cap A_j = \phi \, , \quad i \neq j$

$\boxed{\bigcup A_i \subseteq A}$

$x \in A \Rightarrow x \in A_i \Rightarrow x \in \bigcup A_i$

Funciones y Conjuntos

Demostración