MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar Extra

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

2 de Junio de 2020

Lógica

P1.

Tenemos que la siguiente proposición es una <u>contradicción</u>.

$$((p_3 \Leftrightarrow \overline{p_5}) \wedge (p_5 \vee p_1 \vee p_6)) \Rightarrow ((p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee \overline{p_3} \vee (\overline{p_4} \Rightarrow p_1))$$

Halle los valores de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6.

Problemas

Demostración

Cuantificadores

P2.a)

Exprese lo siguiente como una proposición cuantificada:

"Hay un número x tal que cuando se le suma cualquier número, el resultado es ese número, y que si es multiplicado por cualquier número, el resultado es x."

Problemas

Demostración

Cuantificadores

P2.b)

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = x^2$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq x^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq x^2$
5. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \leq x^2$

Problemas

Demostración

Inducción

P3.a)

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2$, $f_1 = 2a$ y $\forall n \geq 0,\ f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \geq a^n + b^n$

P3.b)

Demuestre que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

P3.c)

Demuestre que (para un $p \geq 1$ fijo) $n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+p-1)$ es divisible por p ,$\forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Inducción

Demostración

Conjuntos

P4.

Demuestre que:

- $A \subseteq A^c \Rightarrow A = \emptyset$
- $(A \cap B^c) \cup A = A$
- $(A \triangle B) \cup (A^c \cap B^c)^c = A \cup B$

Funciones y Conjuntos

Demostración

Funciones

P5.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

- Es f inyectiva?
- Mostrar que el recorrido de f es $[-1, 1]$
- Mostrar que $g : [-1, 1] \to [-1, 1],\ g(x) = f(x)$ es biyectiva.

Funciones y Conjuntos

Demostración

Funciones y Conjuntos

P6.

Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$. Sean además $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f((x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in C \end{cases}$$

- Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.
- Demuestre que si f, g son epiyectivas, entonces h es epiyectiva.
- Si f, g son biyectivas, demuestre que h es biyectiva y encuentre su inversa.

Funciones y Conjuntos

Demostración

Funciones y Conjuntos

P7.

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera y $A \subseteq E$, con $A \neq \emptyset$. Se define

$$\begin{aligned} f :& \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ & X \to f(X) = X \setminus A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :& \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ & X \to g(X) = X \cup A \end{aligned}$$

- Demuestre que $f \circ g = f$ y que $g \circ f = g$
- Demuestre que $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(A)$
- Demuestre que $\forall X \in \mathcal{P}(E), f(X) \neq A$

Funciones y Conjuntos

Demostración