MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 6

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

2 de Junio de 2020

Resumen

Funciones

¿Qué es una función? Bueno, en verdad, es una buena pregunta.

Resumen

Funciones

¿Qué es una función? Bueno, en verdad, es una buena pregunta.
La definición formal es:

Diremos que la 3-tupla $f = (A, B, G)$ es función de A en B si:

- $G \subseteq A \times B$
- $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G$

$f : A \to B$

A G se le llama el grafo de la función f

Resumen

¿En otras palabras?

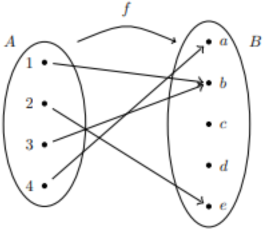
f (de A en B) es como una maquinita, a la cual yo le entrego *cualquier* elemento de A y me entrega de vuelta un *único* elemento de B (decimos entonces que $f(a) = b$).

$f : A \to B$

$Dom(f) = A$

$Cod(f) = B$

$Rec(f) = \{a, b, e\}$



$G = \{(1,b), (2,e), (3,b), (4,a)\}$

$f(1) = b$

$(2,e) \to f(2) = e$

$f(3) = b$

$f(4) = a$

$Rec(f) = \{y : (x,y) \in G_f\}$

$Rec(f) \subseteq Cod(f)$

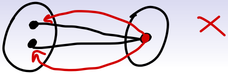
Resumen

recorrido(f)
$= \{ y \in B : \exists x \in A,\ f(x) = y \}$

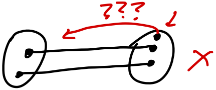
Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. Entonces

- Al conjunto A lo llamamos el **dominio** de f o **conjunto de partida** de f. Lo denotamos por $Dom(f)$.
- Al conjunto B lo llamamos **codominio** o **conjunto de llegada** de f. Lo denotamos por $Cod(f)$.
- Al grafo de f ($\{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\}$) lo denotamos por G_f.
- f y g serán iguales si vistas como 3-tuplas $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$
- Sean A y B conjuntos. El conjunto de todas las funciones de A en B se denota por: $B^A = \{f : A \to B : f \ es \ funcion\}$

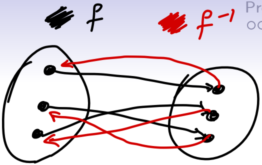
2 no iny



no epi



Resumen



$\forall y \in B, \exists ! \, x \in A : f(x) = y$

Las funciones tienen distintas propiedades:

- Inyectividad: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Equivalentemente (y esta nos gusta más) $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Epiyectividad: $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$
- Biyectividad: Inyectividad y Epiyectividad
- Función inversa: Dada $f : A \to B$ biyectiva, se define la función inversa de f (denotada $f^{-1} : B \to A$) como la función de B en A dada por:

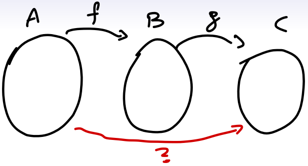
$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

epin

$g \circ f$ es epiy $\Rightarrow$ g es epiy.

$g \circ f$ es iny $\Rightarrow$ f es iny.

Resumen



Composición de Funciones

Tenemos A, B, C conjuntos no vacíos. $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Nos gustaría ver una forma para ir desde A a C (ojalá, que esa forma sea una función)

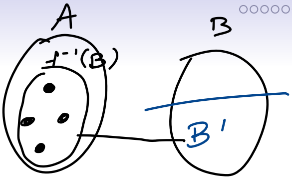
- Función composición: la **composición** de f y g, la cual denotaremos por $g \circ f$, se define como la función de A en C, dada por

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- Inversa de una composición: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Resumen



Aún no terminamos

- Sea $f : A \to B$ una función y sea $A' \subseteq A$. Definimos el **conjunto imagen** de A' por f como:
$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\}$$
- Conjunto preimagen: Sea $f : A \to B$ función y sea $B' \subset B$. Definimos el **conjunto preimagen** de B' por f como:
$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

Hay muchas propiedades de imagen y preimagen. Revísenlas en el apunte, en general siempre nos quedamos con la idea de que la preimagen se porta superbien (y la imagen piola bien).

Problemas

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subseteq \mathbb{N}\}$

P1. $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \iff \emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Se quiere definir una función con dominio $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y codominio $\mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, indique si queda bien definida (justifique):

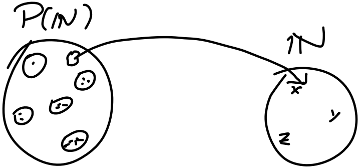
- A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el menor elemento en S. ×
- A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el mayor elemento en S. ×
- A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el menor elemento en $S \cup S^c = \mathbb{N}$ ✓

$f(x) = y \in \mathbb{N}$, y es único, vive en el codominio.

- $f(\emptyset) = ???$ como el vacío no tiene elementos no podemos asociarle el menor. f no es fun.
- $f(\emptyset) = ???$ no le puedo asociar el mayor.

Problemas

Demostración



$f(S)$ es el menor elemento en S
$\Rightarrow f(\emptyset)$ no existe
$\Rightarrow f$ no es función
(análogo con el mayor)

en el tercer caso, asociamos el 0 a cualquier conjunto $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$f(S) = 0 \quad \forall S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y esto sí es función

$(\forall S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \exists!\, y\ (=0)$ tq $f(S) = y)$

Problemas

P2.

Se define la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante:

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1 \text{ si n es impar} \\ \dfrac{n}{2} \text{ si n es par} \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Determine si f es

1. Inyectiva NO
2. Epiyectiva SI
3. Biyectiva NO

NO, pq no es biyectiva

Además, indique si existe la función inversa f^{-1}, y en caso de existir, determine $f^{-1}(m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Justifique sus respuestas.

Problemas

Demostración Iny? : Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$f(x_1) = f(x_2)$ ¿$x_1 = x_2$? ¿$x_1 \neq x_2$?

x_1, x_2 son pares: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ✓

x_1, x_2 son impares: $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \cancel{3}x_1 + \cancel{1} = \cancel{3}x_2 + \cancel{1}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ✓

x_1 par, x_2 impar (el otro es análogo): $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2} = 3x_2 + 1$

(8, 2)

- $\frac{x_1}{2} = \frac{8}{2} = 4$
- $3 \cdot 1 + 1 = 4$.

$\Rightarrow x_1 = x_2$ no es cierto

NO ES INYECTIVO

Problemas

Demostración Epi? Sea $y \in \mathbb{N}$ arbitrario y nos gustaría encontrar $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = y$.

Demostraremos que $x =$??? siempre cumple $f(x) = y$. $2y$

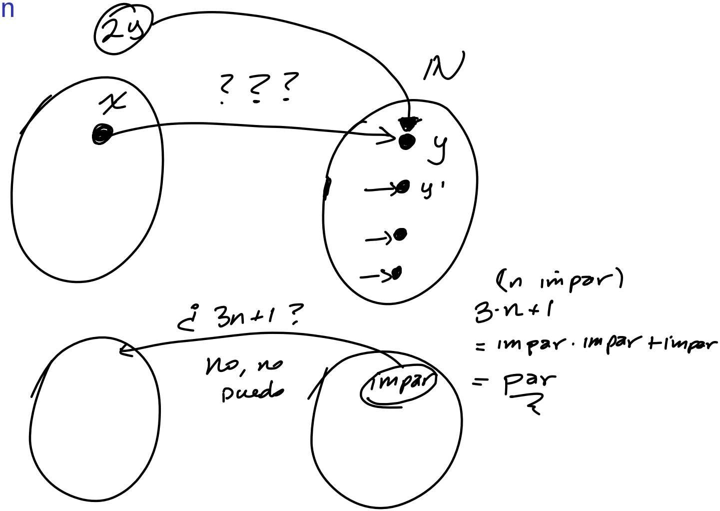
$(x$ par$)$ $\boxed{f(x) = \frac{x}{2} = y} \longrightarrow \boxed{x = 2y}$

$2y \in \mathbb{N}$ porque $y \in \mathbb{N}$. $2y$ es par $\Rightarrow f(2y) = y$.

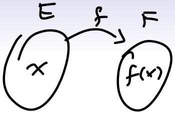
Luego, $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}$ tq $f(x) = y \Leftrightarrow f$ es epi.

Problemas

Demostración



Problemas



P3.

Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ una función.

1. Demuestre que $\forall A, B \subseteq F, f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$
2. Demuestre que $\forall A, B \subseteq E, f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$, y que si f es inyectiva se tiene la igualdad.

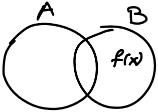
1) $\subseteq$| Sea $x \in f^{-1}(A \Delta B)$, $f(x) \in F$, en particular

$f(x) \in A \Delta B$, $f(x) \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

• $\underbrace{f(x) \in B \cap A^c}$, $x \in f^{-1}(B) \cap (f^{-1}(A))^c$

$\rightarrow x \in f^{-1}(B)$ pues $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$, pero

$\rightarrow f(x) \notin A \Rightarrow x \notin f^{-1}(A) \Rightarrow x \in (f^{-1}(A))^c$



$x \in f^{-1}(A)$

$x \in f^{-1}(B)$

$\vdots$

Problemas

Demostración Del mismo modo, intercambiando A con B, tenemos que, para el caso $f(x) \in A \setminus B$, $x \in f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B))^c$. Luego:

$$x \in (f^{-1}(B) \cap (f^{-1}(A))^c) \cup (f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B))^c)$$
$$= (f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)) \cup (f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B))$$
$$= f^{-1}(B) \,\Delta\, f^{-1}(A)$$

$\supseteq$ Sea $x \in f^{-1}(A) \,\Delta\, f^{-1}(B)$: 2 casos.

$x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ $\vee$ $x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$

Problemas

Demostración

Caso 1: $x \in \underbrace{f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)}_{f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B))^c}$, $f(x)$??

$f(x) \in A \wedge f(x) \notin B$
$(\in B^c)$

$\Rightarrow f(x) \in A \setminus B$

Caso 2: $x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$. $f(x) \in B \wedge f(x) \in A^c$

$\Rightarrow f(x) \in B \setminus A$.

$f(x) \in A \setminus B \cup B \setminus A = A \Delta B$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A \Delta B)$

Problemas

Demostración

2. Demuestre que $\forall A, B \subseteq, f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$, y que si f es inyectiva se tiene la igualdad.

Sea $y \in f(A) \triangle f(B)$ $(\Rightarrow y \in f(A \triangle B))$

$y \in f(A) \setminus f(B)$ ✓ $y \in f(B) \setminus f(A)$

- $y \in f(A) \wedge (f(B))^c \Rightarrow \exists x \in A$ tq $f(x) = y$

¿$x \in B$? No, pues entonces $f(x) = y \in f(B) \Rightarrow x \in B^c$.

$x \in A \setminus B$.

- Análogo, $x \in B \setminus A$.

Luego, $x \in A \setminus B \cup B \setminus A = A \triangle B$.

Luego, $y = f(x) \in f(A \triangle B)$.