MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 6

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

2 de Junio de 2020

Resumen

Funciones

¿Qué es una función? Bueno, en verdad, es una buena pregunta.

Resumen

Funciones

¿Qué es una función? Bueno, en verdad, es una buena pregunta.
La definición formal es:
Diremos que la 3-tupla $f = (A, B, G)$ *es función de* A *en* B *si*:

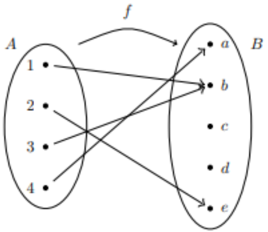
- $G \subseteq A \times B$
- $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G$

A G *se le llama el grafo de la función* f

Resumen

¿En otras palabras?

f (de A en B) es como una maquinita, a la cual yo le entrego *cualquier* elemento de A y me entrega de vuelta un *único* elemento de B (decimos entonces que $f(a) = b$).



Resumen

Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. Entonces

- Al conjunto A lo llamamos el **dominio** de f o **conjunto de partida** de f. Lo denotamos por $Dom(f)$.
- Al conjunto B lo llamamos **codominio** o **conjunto de llegada** de f. Lo denotamos por $Cod(f)$.
- Al grafo de f ($\{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\}$) lo denotamos por G_f.
- f y g serán iguales si vistas como 3-tuplas $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$
- Sean A y B conjuntos. El conjunto de todas las funciones de A en B se denota por: $B^A = \{f : A \to B : f \text{ } es \text{ } funcion\}$

Resumen

Las funciones tienen distintas propiedades:

- Inyectividad: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Equivalentemente (y esta nos gusta más) $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Epiyectividad: $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$
- Biyectividad: Inyectividad y Epiyectividad
- Función inversa: Dada $f : A \to B$ biyectiva, se define la función inversa de f (denotada $f^{-1} : B \to A$) como la función de B en A dada por:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Resumen

Composición de Funciones

Tenemos A, B, C conjuntos no vacíos. $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Nos gustaría ver una forma para ir desde A a C (ojalá, que esa forma sea una función)

- Función composición: la **composición** de f y g, la cual denotaremos por $g \circ f$, se define como la función de A en C, dada por

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

- Inversa de una composición: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Resumen

Aún no terminamos

- Sea $f : A \to B$ una función y sea $A' \subseteq A$. Definimos el **conjunto imagen** de A' por f como:
$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\}$$
- Conjunto preimagen: Sea $f : A \to B$ función y sea $B' \subset B$. Definimos el **conjunto preimagen** de B' por f como:
$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

Hay muchas propiedades de imagen y preimagen. Revísenlas en el apunte, en general siempre nos quedamos con la idea de que la preimagen se porta superbien (y la imagen piola bien).

Problemas

P1.

Se quiere definir una función con dominio $\mathcal{P}(N)$ y codominio N. En cada uno de los siguientes casos, indique si queda bien definida (justifique):

- A $S \in \mathcal{P}(N)$ se le asocia el menor elemento en S.
- A $S \in \mathcal{P}(N)$ se le asocia el mayor elemento en S.
- A $S \in \mathcal{P}(N)$ se le asocia el menor elemento en $S \cup S^c$

Problemas

Demostración

Problemas

P2.

Se define la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 3n + 1 \text{ si n es impar} \\ \dfrac{n}{2} \text{ si n es par} \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Determine si f es

1. Inyectiva
2. Epiyectiva
3. Biyectiva

Además, indique si existe la función inversa f^{-1}, y en caso de existir, determine $f^{-1}(m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Justifique sus respuestas.

Problemas

Demostración

Problemas

Demostración

Problemas

Demostración

Problemas

P3.

Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ una función.

1. Demuestre que $\forall A, B \subseteq, f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$
2. Demuestre que $\forall A, B \subseteq, f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$, y que si f es inyectiva se tiene la igualdad.

Problemas

Demostración

Problemas

Demostración

Problemas

Demostración